

CAPITOLUL 1

BAZELE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI

1.1. MĂRIMI PRIMITIVE ȘI MĂRIMI DERIVATE

Stările și fenomenele fizice se caracterizează cu ajutorul mărimilor fizice care se clasifică în două categorii:

- *mărimi primitive* - se introduc pe cale experimentală, indicând și procedeul de măsurare;
- *mărimi derivate* - se definesc cu ajutorul mărimilor primitive.

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice utilizează șase specii de mărimi primitive specifice, care caracterizează complet starea electromagnetică a corpurilor și starea câmpului electromagnetic.

Starea electromagnetică a corpurilor se caracterizează macroscopic cu următoarele patru mărimi primitive: *sarcina electrică* (q), *momentul electric* ($\vec{p}$), *momentul magnetic* ($\vec{m}$) și *intensitatea curentului electric de conducție* (i). Se constată că două din aceste mărimi sunt scalare (q și i) și două vectoriale ($\vec{p}$ și $\vec{m}$).

Starea câmpului electromagnetic se caracterizează macroscopic prin următoarele două mărimi primitive: *vectorul intensității câmpului electric în vid* ($\vec{E}_v$) și *vectorul inducției magnetice în vid* ($\vec{B}_v$).

Mărimile derivate utilizate în teoria câmpului electromagnetic sunt: tensiunea electrică, tensiunea magnetică, fluxul electric, fluxul magnetic, solenația, rezistența, capacitatea, inductivitatea etc.

1.2. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ STĂRILE ELECTROMAGNETICE ALE CORPURILOR

1.2.1. Starea de electrizare (de încărcare electrică)

Starea de electrizare se poate obține prin frecarea corpurilor. Dacă se explorează câmpul electric în vid cu ajutorul unui corp de probă încărcat cu sarcină electrică, se determină că forța care se exercită asupra acestuia are expresia:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_v. \quad (1.1)$$

Relația (1.1) introduce *mărimea primitivă sarcină electrică* (q), numită și sarcină electrică adevărată, ce caracterizează global starea de încărcare electrică a unui corp mic. Aceasta este o mărime *scalară*, dotată cu semn. Unitatea de măsură în SI se numește *coulomb* [C].

În cazul unui corp mare, caracterizarea stării de încărcare electrică se face local (într-un punct), cu ajutorul unor mărimi derivate, numite *densități de sarcină electrică*:

- *densitatea lineică*: $\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}; \quad (1.2)$

- *densitatea de suprafață*: $\rho_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}; \quad (1.3)$

- *densitatea de volum*: $\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.4)$

În cazul unui domeniu finit în care sarcina este repartizată în toate cele trei moduri, sarcina totală cuprinsă în domeniu este:

$$q = \int_V \rho_V dV + \int_S \rho_S dA + \int_C \rho_L dl. \quad (1.5)$$

Dacă se freacă între ele două corpuri, unul se încarcă cu sarcină pozitivă, iar celălalt cu sarcină negativă. În general, sarcina totală a unui sistem de corpuri izolat (înconjurat de materiale izolante) este constantă.

Corpurile încărcate cu sarcini electrice își asociază un sistem fizic numit *câmp electric*, prin care se transmit între corpuri forțe și cupluri electrice.

După modul cum transmit starea de electrizare se disting două clase de materiale de importanță esențială în industria electrotehnică:

- **materiale electroconductoare** - din care categorie fac parte: metalele și aliajele lor, cărbunele, anumite soluții de săruri, baze, acizi. *Dintre aceste materiale deosebit de importante pentru industria electrotehnică sunt Cu și Al, din care se realizează conductoarele liniilor electrice aeriene și în cablu și înfășurările mașinilor și transformatoarelor electrice.* Materialele electroconductoare prezintă proprietatea că la trecerea curentului electric, în ele se dezvoltă pierderi de putere prin efect Joule, proporționale cu pătratul intensității curentului.
- **materiale electroizolante**, numite și **materiale dielectrice**, din care fac parte: lemnul, sticla, mătasea, porțelanul, hârtia, uleiul, lacurile, aerul uscat, bachelita, cauciucul, policlorura de vinil etc. În materialele dielectrice folosite în industria electrotehnică se dezvoltă pierderi de putere proporționale cu pătratul tensiunii și cu o mărime de material numită tangenta unghiului de pierderi.

1.2.2. Starea de polarizație

Există corpuri neîncărcate electric, care la introducerea într-un câmp electric exterior, sunt supuse unor cupluri și forțe având expresiile:

$$\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v, \quad (1.6)$$

$$\bar{F} = \text{grad}(\bar{p} \cdot \bar{E}_v). \quad (1.7)$$

Cuplul tinde să alinieze momentul electric pe direcția vectorului câmp electric, iar forța tinde să atragă corpul polarizat în regiunile de câmp mai intens. În câmp omogen forța este nulă.

Starea specifică a corpurilor supuse acestor acțiuni este *starea de polarizație*. Și corpurile polarizate își asociază un câmp electric.

Starea de polarizație a unui corp mic este caracterizată global de **momentul electric** ($\bar{p}$) – *mărime primitivă vectorială* având unitatea de măsură *coulomb metru* [Cm].

În cazul unui corp de dimensiuni mari, starea de polarizație se caracterizează local cu ajutorul densității de volum a momentului electric, mărime derivată vectorială, numită *polarizație* ($\bar{P}$):

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta V} = \frac{d\bar{p}}{dV}, \quad (1.8)$$

având unitatea de măsură *coulomb pe metru pătrat* [C/m²].

Starea de polarizație se poate obține prin:

- tratamente speciale precum: deformare mecanică (piezoelectricitate), încălzire (piroelectricitate), topire și solidificare într-un câmp electric intens (electreți);
- simpla introducere a lor într-un câmp electric.

Materialele din prima categorie din care fac parte cristalele de cuarț, sarea Seignette și turmalina, au o stare de polarizație independentă de câmpul electric, numită *polarizație permanentă*, caracterizată de momentul electric permanent $\bar{p}_p$.

Din a doua categorie fac parte dielectricii a căror stare de polarizație apare numai în prezența câmpului electric și dispare când acesta se anulează. O astfel de *polarizație* se numește *temporară* și este caracterizată de momentul electric temporar $\bar{p}_t$.

Cele două tipuri de polarizație nu se exclud, astfel încât atât momentul electric cât și polarizația satisfac relațiile:

$$\bar{p} = \bar{p}_t + \bar{p}_p, \quad (1.9)$$

$$\bar{P} = \bar{P}_t + \bar{P}_p. \quad (1.10)$$

Metalele sunt practic nepolarizabile electric.

1.2.3. Starea de magnetizație

Corpurile asupra cărora se exercită forțe și cupluri la introducerea lor în câmp magnetic prezintă starea de magnetizație. Corpurile magnetizate își asociază un câmp magnetic.

Starea de magnetizație a unui corp mic se caracterizează global cu ajutorul mărimii primitive vectoriale numită *moment magnetic* ($\bar{m}$), care se măsoară în *amper metru pătrat* [Am^2] și este pusă în evidență prin relațiile:

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}_v, \quad (1.11)$$

$$\bar{F} = \text{grad}(\bar{m} \cdot \bar{B}_v). \quad (1.12)$$

Cuplul tinde să alinieze momentul magnetic pe direcția vectorului câmp magnetic, iar forța tinde să atragă corpul magnetizat în regiunile de câmp mai intens. În câmp omogen forța este nulă.

Caracterizarea stării de magnetizare a unui corp mare se face local, cu ajutorul densității de volum a momentului magnetic, mărime derivată numită *magnetizație* ($\bar{M}$):

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta V} = \frac{d\bar{m}}{dV}, \quad (1.13)$$

având unitatea de măsură *amper pe metru* [A/m].

Unele corpuri ajung în stare de magnetizație numai în prezența câmpului magnetic, starea numindu-se *magnetizație temporară*.

Altora le este proprie starea de magnetizație, independent de prezența câmpului magnetic. Această stare se numește *magnetizație permanentă*.

Cele două tipuri de magnetizație nu se exclud reciproc, astfel încât momentul magnetic și magnetizația satisfac relațiile:

$$\bar{m} = \bar{m}_t + \bar{m}_p, \quad (1.14)$$

$$\bar{M} = \bar{M}_t + \bar{M}_p. \quad (1.15)$$

1.2.4. Starea electrocinetică a conductoarelor se caracterizează cu ajutorul mărimii primitive scalare numită *intensitate a curentului electric de conducție* (i) care străbate o anumită suprafață S (în general secțiunea transversală a conductorului)

$$i_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_S}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.16)$$

având ca unitate de măsură *amperul* [A].

Considerând o porțiune de lungime Δl dintr-un conductor filiform parcurs de curentul electric de conducție i , la introducerea în câmp magnetic, asupra lui se exercită o forță

$$\Delta \vec{F} = i \Delta \vec{l} \times \vec{B}_v, \quad (1.17)$$

numită forța lui Laplace.

Pentru caracterizarea locală (într-un punct al suprafeței) a stării electrocinetice, se introduce mărimea derivată numită *densitate a curentului de conducție* ($\vec{J}$), relația dintre cele două mărimi fiind:

$$i = \int_S \vec{J} n_S dA. \quad (1.18)$$

Unitatea de măsură a densității curentului de conducție este *amper pe metru pătrat* [A/m²].

Mărimile primitive ce caracterizează starea electromagnetică a corpurilor și mărimile derivate din ele, împreună cu unitățile de măsură din sistemul internațional de unități (SI) sunt recapitulate în Tabelul 1.1.

Tabelul 1.1.

Mărime primitivă	Simbol	Unitate	Mărime derivată	Simbol	Unitate
Sarcina electrică	q	C	Densitate lineică	ρ_l	C/m
			Densitate superficială	ρ_s	C/m ²
			Densitate volumetrică	ρ_v	C/m ³
Momentul electric	$\vec{p}$	Cm	Polarizația	$\vec{P}$	C/m ²
Momentul magnetic	$\vec{m}$	Am ²	Magnetizația	$\vec{M}$	A/m
Intensitatea curentului electric de conducție	i	A	Densitatea curentului electric de conducție	$\vec{J}$	A/m ²

1.3. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

Câmpul electric și câmpul magnetic reprezintă aspecte particulare ale unui sistem fizic unic, numit *câmp electromagnetic* (noțiune introdusă de Faraday în 1831). Câmpul electromagnetic este o formă de existență a materiei cu următoarele caracteristici:

- reprezintă un *sistem fizic* distinct față de corpuri, putând exista atât asociat acestora (în afara și în interiorul lor) cât și independent de ele (în vid, sub formă de unde electromagnetice);
- reprezintă suportul fizic ce permite transmiterea interacțiunilor electromagnetice din aproape în aproape, în timp și spațiu (cu viteză finită), la orice distanță.

În vid, starea câmpului electromagnetic se caracterizează local (într-un punct) cu ajutorul a două mărimi primitive: *vectorul intensității câmpului electric în vid* ($\vec{E}_v$) și *vectorul inducției magnetice în vid* ($\vec{B}_v$). Aceste mărimi se introduc pe cale experimentală, prin explorarea câmpului electric, respectiv magnetic, în vid, cu ajutorul unui mic corp de probă încărcat cu sarcină electrică q , măsurând forța cu care câmpul acționează asupra acestuia.

Astfel:

- în câmp electric această forță, exprimată cu relația (1.1), introduce mărimea $\vec{E}_v$, a cărei unitate de măsură este *volt pe metru* [V/m];

- în câmp magnetic, forța exercitată asupra corpului care se deplasează cu viteza constantă $\vec{v}$, numită forța lui Lorentz, exprimată cu relația

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_v, \quad (1.19)$$

introduce mărimea $\vec{B}_v$, având ca unitate de măsură *tesla* [T].

În corpuri, starea câmpului electromagnetic este caracterizată macroscopic prin următoarele mărimi:

- intensitatea câmpului electric $\vec{E}$, care în vid coincide cu $\vec{E}_v$, având unitatea de măsură *volt pe metru* [V/m];
- inducția electrică $\vec{D}$, care în vid satisface relația $\vec{D}_v = \epsilon_0 \vec{E}_v$, cu unitatea de măsură *coulomb pe metru pătrat* [C/m²]; $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ [F/m] (*Farazi pe metru*), este o constantă universală, și se numește permitivitatea vidului.
- intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$, care în vid satisface relația $\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H}_v$, cu unitatea de măsură *amper pe metru* [A/m]; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] (*Henry pe metru*), este o constantă universală, și se numește permeabilitatea vidului.
- inducția magnetică $\vec{B}$, care în vid coincide cu $\vec{B}_v$, cu unitatea de măsură *tesla* [T].

Aceste patru mărimi de stare locală (funcții de punct), se introduc cu ajutorul celor două mărimi primitive $\vec{E}_v$ și $\vec{B}_v$ prin experiențe idealizate, motiv pentru care ele sunt denumite și subspecii de mărimi primitive, astfel:

- în corpurile polarizate se definesc
$$\begin{cases} \vec{E} = f(\vec{E}_v) \\ \vec{D} = f(\vec{E}_v) \end{cases},$$
- în corpurile magnetizate se definesc
$$\begin{cases} \vec{H} = f(\vec{B}_v) \\ \vec{B} = f(\vec{B}_v) \end{cases}.$$

Cu ajutorul acestor mărimi se definesc patru mărimi derivate importante în cadrul teoriei macroscopice a electromagnetismului:

- tensiunea electrică (U)- unitate de măsură *voltul* [V];
- fluxul electric (Ψ)- unitate de măsură *coulombul* [C];
- tensiunea magnetică (U_m)- unitatea de măsură *amper* (A) sau *amper-spiră* (A.sp);
- fluxul magnetic (Φ) cu unitatea de măsură *weberul* (Wb).

Relațiile de definiție sunt următoarele:

- **tensiunea electrică** între două puncte A,B, calculată de-a lungul unei curbe deschise, C, este:

$$u_{AB} = \int_{A(C)}^B \vec{E} d\vec{s}, \quad (1.20)$$

unde $d\vec{s}$ este elementul de linie orientat (Fig. 1.1).

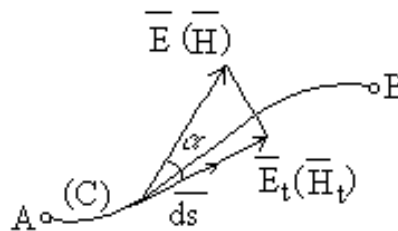


Fig. 1.1

Dacă integrala se calculează pe o curbă închisă, Γ , atunci mărimea corespunzătoare se numește *tensiune electromotoare* (t.e.m.) și se exprimă cu relația:

$$e_{\Gamma} = \int_{\Gamma}^d \overline{E} ds. \quad (1.21)$$

➤ **fluxul electric** printr-o suprafață oarecare, deschisă, S , este:

$$\Psi_S = \int_S^d \overline{D} n_S dA, \quad (1.22)$$

unde $\overline{n_S}$ este normala la suprafață. Dacă suprafața se sprijină pe o curbă închisă, Γ , atunci relația (1.22) devine:

$$\Psi_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}}^d \overline{D} n_{S_{\Gamma}} dA, \quad (1.23)$$

unde dA reprezintă elementul de arie neorientat.

Sensul normalei la suprafață este asociat cu sensul de parcurgere al curbei după regula burghiului drept (Fig. 1.2).

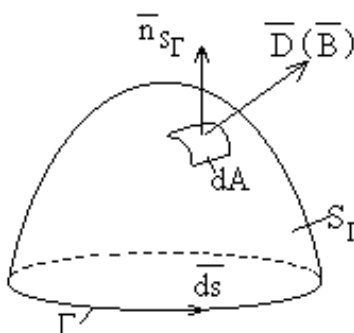


Fig. 1.2

Dacă se calculează fluxul electric printr-o suprafață închisă, Σ , atunci relația de definiție devine:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma}^d \overline{D} n_{\Sigma} dA. \quad (1.24)$$

Normala la suprafața închisă este prin definiție normala exterioară.

➤ **tensiunea magnetică** între două puncte A,B, se definește ca și tensiunea electrică (Fig. 1.1) de-a lungul unei curbe deschise:

$$u_{mAB} = \int_{A(C)}^d \overline{H} ds. \quad (1.25)$$

Dacă integrala se efectuează pe o curbă închisă, atunci se definește *tensiunea magnetomotoare* (t.m.m.):

$$u_{mm\Gamma} = \int_{\Gamma}^d \overline{H} ds. \quad (1.26)$$

- **fluxul magnetic** se definește ca și fluxul electric (Fig. 1.2), fie prin suprafețe deschise, fie prin suprafețe închise, cu relațiile:

$$\Phi_S = \int_S \overline{Bn_S} dA, \quad (1.27)$$

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{Bn_{S_\Gamma}} dA, \quad (1.28)$$

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{Bn_\Sigma} dA. \quad (1.29)$$

Notă. Rămân valabile toate observațiile făcute la fluxul electric în legătură cu normalele la suprafețe.

Alte mărimi derivate importante sunt: solenația (Θ), rezistența (R), capacitatea (C), inductivitatea (L) etc.

În Tabelul 1.2 este prezentată corespondența dintre aceste mărimi și unitățile de măsură.

Tabelul 1.2

Mărimie primitivă (subspecie)	Simbol	Unitate	Mărimie derivată	Simbol	Unitate
Intensitatea câmpului electric în vid (în corpuri)	$\overline{E}_v$ ($\overline{E}$)	V/m	Tensiunea electrică	U	V
Inducția electrică în corpuri	$\overline{D}$	C/m ²	Fluxul electric	Ψ	C
Intensitatea câmpului magnetic în corpuri	$\overline{H}$	A/m	Tensiunea magnetică	U_m	A (A.sp)
Inducția magnetică în vid (în corpuri)	$\overline{B}_v$ ($\overline{B}$)	T	Fluxul magnetic	Φ	Wb

1.4. REGIMURILE DE DESFĂȘURARE A FENOMENELOR ELECTRICE ȘI MAGNETICE

După modul de variație în timp a mărimilor electrice și magnetice, stările electromagnetice se pot desfășura în următoarele regimuri:

- **regimul static**, în care mărimile de stare nu variază în timp și nu se produc transformări energetice; în acest regim fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice și pot fi studiate în cadrul unor capitole distincte ale teoriei, numite *electrostatica* și respectiv *magnetostatica*;

- **regimul staționar**, numit și regim de curent continuu, în care mărimile nu variază în timp, dar interacțiunile câmpului electromagnetic cu corpurile sunt însoțite de transformări energetice;

- **regimul quasistaționar**, în care mărimile variază în timp, dar suficient de lent încât să se poată neglija curenții de deplasare în raport cu cei de conducție, și influența lor magnetică peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor; este cel mai important regim din punct de vedere al aplicațiilor tehnice;

- **regimul nestaționar** (regim variabil) caracterizat de cea mai generală formă de variație în timp a mărimilor, în care intervine fenomenul de radiație electromagnetică.

1.5. CÂMPUL ELECTRIC IMPRIMAT

Experiența arată că starea electrocinetică a conductoarelor este produsă uneori de cauze de natură neelectromagnetică (de exemplu de o pilă galvanică). Efectul acestor cauze se echivalează cu efectul unui câmp electric ce ar determina aceeași stare electrocinetică. Acest câmp se numește *câmp electric imprimat*. El este localizat fie în volumul fie pe suprafața de contact a corpurilor conductoare și se caracterizează local prin mărimea derivată vectorială numită *intensitatea a câmpului electric imprimat* - $\overline{E}_i$.

$\overline{E}_i$ este o mărime de material și caracterizează *conductoarele neomogene din punct de vedere structural, termic, chimic și/sau accelerate*.

Proprietățile globale ale câmpului electric imprimat în raport cu o anumită curbă sunt exprimate de integrala de linie a vectorului $\overline{E}_i$ în raport cu acea curbă, mărimea corespunzătoare numindu-se *tensiune electromotoare imprimată*:

$$e_{i(C)} = \int_C \overline{E}_i \cdot d\overline{s}. \quad (1.30)$$

1.6. LEGILE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI

Legile sunt relații determinate experimental care exprimă raporturi obiective și esențiale între fenomene și sunt stabilite prin generalizarea datelor experimentale, pe baza abstractizării.

Teoremele sunt relații care se pot deduce prin analiză logică din altele (în ultimă instanță din legi).

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice se clasifică în:

- *legi generale* – valabile pentru orice fel de corpuri, indiferent de regimul de desfășurare al fenomenelor și independent de caracteristicile de material ale mediului. În această categorie intră:

- legea fluxului electric,
- legea fluxului magnetic,
- legea inducției electromagnetice,
- legea circuitului magnetic,
- legea conservării sarcinii electrice,
- legea transformării energiei electromagnetice în procesul conducției electrice (legea lui Joule),
- legea legăturii în câmp electric,
- legea legăturii în câmp magnetic;

- *legi de material* – sunt valabile numai pentru anumite corpuri, fiind dependente de caracteristicile de material ale acestora:

- legea polarizației temporare,
- legea magnetizației temporare,
- legea conducției electrice (legea lui Ohm),
- legea electrolizei.

1.6.1. Legea fluxului electric

Corpurile încărcate cu sarcini electrice își asociază un câmp electric.

Liniile de câmp electric sunt linii deschise care pleacă de pe corpurile încărcate cu sarcini pozitive și ajung pe corpurile încărcate cu sarcini negative (Fig. 1.3).

Suprafețele perpendiculare în orice punct pe liniile de câmp se numesc *suprafețe echipotențiale*.

Vectorul intensității câmpului electric și vectorul inducției electrice sunt tangenți în fiecare punct la linia de câmp și, fiind funcții de punct $\vec{E}(r)$, respectiv $\vec{D}(r)$, au valori constante în toate punctele aceleiași suprafețe echipotențiale.

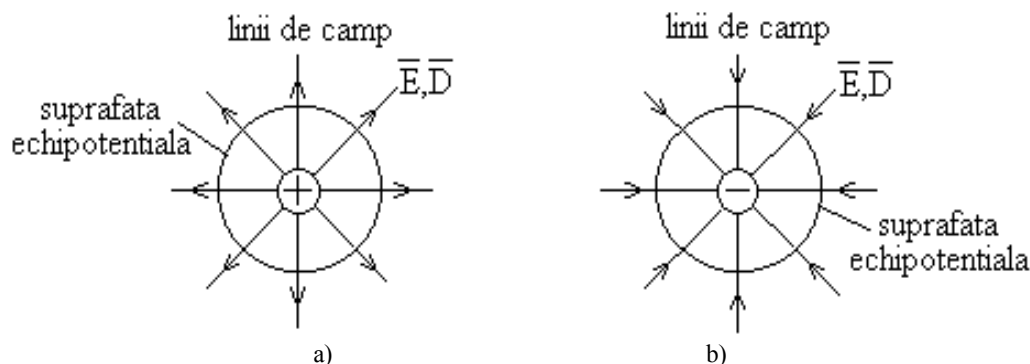


Fig. 1.3

Dacă înconjurăm cu o suprafață închisă un corp încărcat cu sarcină electrică, toate liniile de câmp vor străbate suprafața. Fluxul electric este mărimea ce caracterizează câmpul electric din punct de vedere al valorilor pe care le ia inducția electrică în toate punctele acestei suprafețe.

”În orice moment de timp fluxul electric Ψ printr-o suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică $q_{V\Sigma}$ localizată în domeniul delimitat de această suprafață”:

$$\Psi_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dA = q_{V\Sigma}, \quad (1.31)$$

unde $\vec{n}_{\Sigma}$ reprezintă normala exterioară la suprafața închisă Σ (Fig. 1.4).

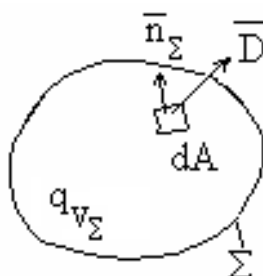


Fig. 1.4

Trecând de pe suprafața Σ în domeniul (arbitrar) delimitat de aceasta, V_{Σ} , (cu teorema lui Gauss-Ostrogradski) și exprimând sarcina electrică în raport cu densitatea ei de volum, se obține forma locală a legii în domenii de continuitate și netezime a proprietăților electrice:

$$\int_{V_{\Sigma}} \text{div} \vec{D} dV = \int_{V_{\Sigma}} \rho_V dV, \quad (1.32)$$

de unde rezultă

$$\text{div} \vec{D} = \rho_V. \quad (1.33)$$

La o suprafață de discontinuitate (între două medii cu proprietăți electrice diferite) încărcată cu densitate de suprafață a sarcinii electrice se obține o *formă locală* valabilă în toate punctele suprafeței:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s. \quad (1.34)$$

Dacă suprafața nu este încărcată cu sarcină, se obține relația de conservare a componentelor normale ale inducției electrice:

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (1.35)$$

Aplicații. Calculul intensității câmpului electric pentru configurații cu simetrie.

1.6.2. Legea fluxului magnetic

Liniile de câmp magnetic (liniile vectorului inducției magnetice) sunt linii închise.

Această constatare conduce la formularea legii fluxului magnetic: ”În orice moment fluxul magnetic printr-o suprafață închisă este nul”:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{Bn} dA = 0. \quad (1.36)$$

Ținând seama de relația de definiție prelucrată cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski se obține forma locală a legii, pentru domenii de continuitate și netezime ale proprietăților magnetice:

$$\int_{V\Sigma} \operatorname{div} \overline{B} dV = 0, \quad (1.37)$$

adică

$$\operatorname{div} \overline{B} = 0. \quad (1.38)$$

Relația (1.38) arată că nu există sarcini magnetice de tipul celor electrice și că liniile câmpului magnetic sunt linii închise.

La suprafețe de discontinuitate forma locală a legii fluxului magnetic este:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (1.39)$$

adică se obține relația de conservare a componentelor normale ale inducției magnetice:

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (1.40)$$

1.6.3. Legea inducției electromagnetice

Experimental se constată că la variația în timp a câmpului magnetic se produce câmp electric. Fenomenul, constând în apariția în lungul unui contur închis a unei tensiuni electromotoare, poartă numele de inducție electromagnetică și a fost pus în evidență prin experiențele lui Faraday, în 1831. Ca efect al acestui fenomen, în circuitele electrice închise apar curenți induși cu un astfel de sens, încât se opun cauzei care i-a produs (regula lui Lenz).

Enunț: ”Tensiunea electromotoare indusă în lungul unei curbe închise Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață deschisă ce se sprijină pe curba Γ ”:

$$e_{\Gamma} = - \frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt}. \quad (1.41)$$

Ținând seama de relațiile de definiție ale celor două mărimi, se obține forma explicită

$$\int_{\Gamma} \overline{E} ds = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \overline{B} n_{S_{\Gamma}} dA, \quad (1.42)$$

în care elementul de arc $\overline{ds}$ pe curba Γ și versorul normalei $\overline{n}_{S_{\Gamma}}$ la suprafața S_{Γ} sunt asociate după regula burghiului drept (Fig. 1.2).

Considerând că suprafața S_{Γ} este atașată corpurilor și se deplasează odată cu acestea, dezvoltând derivata substanțială (de flux), pentru medii în mișcare se obține următoarea formă integrală dezvoltată a legii:

$$\int_{\Gamma} \overline{E} ds = - \int_{S_{\Gamma}} \left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{v} \operatorname{div} \overline{B} + \operatorname{rot}(\overline{B} \times \overline{v}) \right) \overline{n}_{S_{\Gamma}} dA, \quad (1.43)$$

și ținând seama de forma locală a legii fluxului magnetic, rezultă

$$\int_{\Gamma} \overline{E} ds = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \overline{n}_{S_{\Gamma}} dA - \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot}(\overline{B} \times \overline{v}) \overline{n}_{S_{\Gamma}} dA = e_t + e_m, \quad (1.44)$$

unde e_t se numește t.e.m. indusă prin transformare, iar e_m – t.e.m. indusă prin mișcare.

În domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuației (1.44), se obține *forma locală* a legii:

$$\operatorname{rot} \overline{E} = - \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\overline{v} \times \overline{B}). \quad (1.45)$$

Pentru medii imobile ($\overline{v} = 0$), ecuația devine

$$\operatorname{rot} \overline{E} = - \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \quad (1.46)$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuație a lui Maxwell*.

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, în orice regim, componenta tangențială a intensității câmpului electric se conservă:

$$E_{t2} = E_{t1}. \quad (1.47)$$

Aceasta reprezintă forma locală la suprafețe de discontinuitate a legii.

Aplicații

1. *Principiul producerii t.e.m. alternative.* Funcționarea generatoarelor de c.a. are la bază fenomenul inducției electromagnetice, care se produce ca urmare a existenței unui câmp magnetic învârtitor (produs de rotorul mașinii care este un electromagnet rotit de turbină) ce întreține spirele înfășurării statorice în care induce t.e.m. datorită componentei e_m .

2. *Principiul transformatorului electric.* Datorită variației fluxului magnetic din primar, în secundarul transformatorului se induce prin transformare (e_t) o t.e.m. de aceeași frecvență cu cea a mărimilor primare.

3. *În regim static și în regim staționar* legea inducției electromagnetice are forma:

$$e_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \overline{E} ds = 0,$$

numită teorema potențialului electrostatic, respectiv electrocinetic staționar.

Considerând curba Γ o buclă a unui circuit electric aflat în regim staționar sau cvasistaționar, și descompunând-o într-o sumă de curbe deschise C_k , ce urmăresc tensiunile la bornele laturilor care formează bucla, se obține:

$$e_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \overline{E} ds = \sum_k \int_{C_k} \overline{E} ds = \sum_{l_k \in b_h} {}^{(A)}u_k = 0,$$

relație ce reprezintă *teorema a doua a lui Kirchhoff: suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor l_k ce aparțin buclei b_h este nulă*.

1.6.4. Legea circuitului magnetic

Experimental se constată că: ”*Tensiunea magnetomotoare de-a lungul unei curbe închise Γ este egală cu suma dintre solenația corespunzătoare curenților de conducție care străbat o suprafață deschisă S_{Γ} , mărginită de curba Γ și viteza de creștere a fluxului electric prin suprafața respectivă*”:

$$u_{mm\Gamma} = \Theta_{S_{\Gamma}} + \frac{d\Psi_{S_{\Gamma}}}{dt}. \quad (1.48)$$

Al doilea termen din partea dreaptă a ecuației se numește *curent hertzian*.

Folosind relațiile de definiție ale mărimilor, se obține forma integrală explicită a legii:

$$\int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} n_{S_{\Gamma}} dA + \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \overline{D} n_{S_{\Gamma}} dA, \quad (1.49)$$

în care elementul de arc $\overline{ds}$ pe curba Γ și versorul normalei $\overline{n}_{S_{\Gamma}}$ la suprafața S_{Γ} sunt asociate după regula burghiului drept (Fig. 1.2).

Considerând că suprafața S_{Γ} este atașată corpurilor și se deplasează odată cu acestea, dezvoltând derivata substanțială (de flux) pentru medii în mișcare, se obține următoarea formă integrală dezvoltată a legii:

$$\int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \overline{v} \text{div} \overline{D} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\overline{D} \times \overline{v}) n_{S_{\Gamma}} dA. \quad (1.50)$$

sau ținând seama de forma locală a legii fluxului electric,

$$\int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \rho_V \overline{v} n_{S_{\Gamma}} dA + \int_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\overline{D} \times \overline{v}) n_{S_{\Gamma}} dA. \quad (1.51)$$

Relația se poate scrie sub forma

$$u_{mm\Gamma} = \Theta_{S_{\Gamma}} + i_{DS_{\Gamma}} + i_{vS_{\Gamma}} + i_{RS_{\Gamma}}, \quad (1.52)$$

unde termenii din partea dreaptă reprezintă, în ordine: *solenația* corespunzătoare curenților de conducție, *curentul de deplasare* propriu zis, *curentul de convecție*, și respectiv, *curentul Roentgen* (teoretic).

Observație:

Solenația are următoarea semnificație:

- pentru o suprafață S_{Γ} perpendiculară pe axa unui conductor parcurs de curentul electric de conducție i , și a cărei arie este cel puțin egală cu cea a conductorului: $\Theta_{S_{\Gamma}} = i$;

- dacă aria suprafeței S_F este mai mică decât cea a conductorului: $\Theta_{S_F} = J A_{S_F} = i \frac{A_{S_F}}{A_{cond}}$;
- dacă S_F taie cele N spire, parcurse de curentul i , ale unei bobine: $\Theta_{S_F} = N i$.

În cazul corpurilor imobile relația (1.51) are forma:

$$\int_{\Gamma} \overline{H} d\mathbf{s} = \int_{S_F} \overline{J} n_{S_F} dA + \int_{S_F} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} n_{S_F} dA. \quad (1.53)$$

Se numește regim cvasistaționar, regimul variabil în care se poate neglija curentul de deplasare din legea circuitului magnetic, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor.

În domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice și în ipoteza corpurilor imobile, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuației (1.53), se obține forma locală a legii:

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \quad (1.54)$$

numită *prima ecuație a lui Maxwell*.

La suprafețele de discontinuitate forma locală este:

$$H_{t2} - H_{t1} = J_s. \quad (1.55)$$

Dacă pe suprafața de discontinuitate nu există pânze de curent, are loc conservarea componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic:

$$H_{t2} = H_{t1}. \quad (1.56)$$

1.6.5. Legea conservării sarcinii electrice

Dacă se consideră o suprafață închisă Σ care trece numai prin dielectrici (nu este străbătută de curenți de conducție), sarcina electrică în interiorul suprafeței (reprezentând un sistem izolat) rămâne constantă

$$q_{\Sigma} = ct., \quad (1.57)$$

oricare ar fi fenomenele care se produc în interiorul suprafeței:

Dacă suprafața intersectează și conductoare parcurse de curent electric de conducție, “*intensitatea curentului de conducție care părăsește suprafața Σ este egală în fiecare moment cu viteza de scădere a sarcinii electrice adevărate localizată în volumul delimitat de Σ* ”.

$$i_{\Sigma} = - \frac{dq_{V_{\Sigma}}}{dt}. \quad (1.58)$$

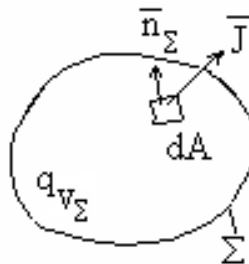


Fig. 1.5

În ipoteza unei distribuții uniforme în volum a sarcinii electrice, folosind relațiile de definiție, legea capătă forma integrală

$$\int_{\Sigma} \bar{J} \bar{n}_{\Sigma} dA = - \frac{d}{dt} \int_{V_{\Sigma}} \rho_V dV. \quad (1.59)$$

Considerând suprafața atașată corpurilor în mișcare, și calculând derivata substanțială a integralei, aplicând apoi teorema Gauss-Ostrogradski, se obține forma integrală dezvoltată a legii

$$\int_{\Sigma} \bar{J} \bar{n}_{\Sigma} dA = - \int_{V_{\Sigma}} \left(\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div}(\bar{v} \rho_V) \right) dV = - \int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV - \int_{\Sigma} \bar{v} \rho_V \bar{n}_{\Sigma} dA. \quad (1.60)$$

Al doilea termen din partea dreaptă a ecuației (1.60) este curentul de convecție definit la relația (1.51), astfel încât trecându-l în partea stângă se obține forma:

$$\int_{\Sigma} (\bar{J} + \bar{v} \rho_V) \bar{n}_{\Sigma} dA = - \int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV. \quad (1.61)$$

Relația (1.61) arată că sarcina electrică dintr-un domeniu delimitat de Σ scade atât datorită curentului de conducție cât și celui de convecție care părăsesc suprafața Σ .

Aplicând termenului din dreapta teorema Gauss-Ostrogradski, domeniul fiind arbitrar, rezultă relația

$$- \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = \text{div}(\bar{J} + \bar{v} \rho_V), \quad (1.62)$$

care reprezintă forma locală a legii pentru domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale.

La trecerea liniilor de curent printr-o suprafață de discontinuitate neîncărcată cu sarcină electrică se conservă componenta normală a densității curentului de conducție

$$\bar{J}_{2n} = \bar{J}_{1n}. \quad (1.63)$$

Observație:

În regim electrocinetic staționar și cvasistaționar

$$i_{\Sigma} = \sum_{l_k \in n_j} (A) i_k = 0,$$

și reprezintă *teorema întâi a lui Kirchhoff*, cu enunțul: *suma algebrică a curenților din laturile l_k incidente într-un nod n_j al unui circuit electric este nulă.*

1.6.6. Legea conducției electrice (legea lui Ohm)

Experimental se constată că “Suma vectorială dintre intensitatea câmpului electric $\bar{E}$ și intensitatea câmpului electric imprimat $\bar{E}_i$ din interiorul unui conductor izotrop este proporțională în fiecare punct cu densitatea curentului electric de conducție din acel punct”:

$$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \bar{J}, \quad (1.64)$$

constanta de proporționalitate ρ fiind o mărime scalară dependentă de natura materialului și de temperatură, numită *rezistivitate*. Relația (1.64) reprezintă forma locală a legii conducției electrice și mai poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_i), \quad (1.65)$$

unde $\sigma = 1/\rho$ se numește *conductivitate electrică*.

Rezistivitatea depinde de temperatura conductorului. Pentru intervale de temperatură nu prea mari, această dependență este linară și se poate aproxima prin relația:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha_0(t - t_0)), \quad (1.66)$$

în care ρ_0 este rezistivitatea la temperatura de referință t_0 , iar α_0 este coeficientul de temperatură al rezistivității la temperatura t_0 .

Observații:

1. Metalele pure și multe din aliajele lor au un coeficient de temperatură al rezistivității pozitiv, adică rezistivitatea lor crește odată cu temperatura.
2. Cărbunele, constantanul și unii electroliți au coeficient de temperatură negativ.
3. Rezistivitatea materialelor semiconductoare variază cu temperatura după o lege exponențială inversă ($\exp(k/T)$).
4. La anumite metale precum plumbul, sau la unele aliaje, rezistivitatea se anulează brusc la temperaturi foarte joase (câteva grade absolute K), care depind de natura materialului și de intensitatea câmpului magnetic în care sunt situate. Fenomenul se numește supraconductibilitate.

În conductoarele perfect omogene din punct de vedere structural, mecanic, termic și chimic, și neaccelerate, în care $\overline{E}_i = 0$, forma locală a legii conducerii electrice este:

$$\overline{E} = \rho \overline{J} \text{ sau } \overline{J} = \sigma \overline{E}. \quad (1.67)$$

În teoria circuitelor electrice prezintă o mare importanță forma integrală a legii lui Ohm care se obține prin integrarea relației (1.64) de-a lungul unei porțiuni neramificate de conductor, între punctele A și B de-a lungul fibrei medii (curba C din Fig. 1.6):

$$\int_{A(C)}^B \overline{E} d\overline{s} + \int_{A(C)}^B \overline{E}_i d\overline{s} = \int_{A(C)}^B \rho \overline{J} d\overline{s} \quad (1.68)$$

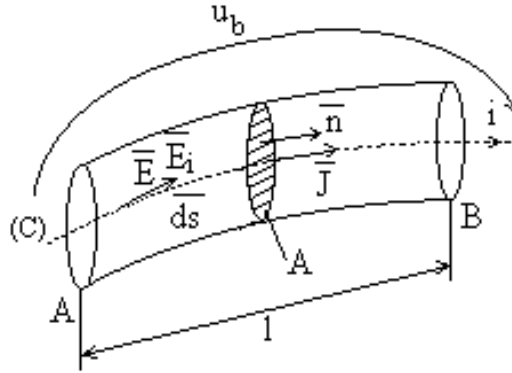


Fig. 1.6

Ținând seama de definițiile mărimilor derivate, relația se poate scrie sub forma:

$$u_b + e_i = \int_C \rho \frac{i}{A} d\overline{s} = i \int_C \frac{\rho}{A} d\overline{s}. \quad (1.69)$$

Pentru conductoare omogene ($\rho = \text{ct.}$) cu secțiune $A = \text{ct.}$, se obține forma integrală a legii lui Ohm pentru laturi de circuit active (având și surse de câmp electric imprimat), numită și caracteristica $u(i)$ a laturii:

$$u_b + e_i = R \cdot i, \quad (1.70)$$

unde:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1.71)$$

reprezintă *rezistența electrică* a porțiunii neramificate de circuit de lungime l și secțiune A și se măsoară în *ohmi* $[\Omega]$. Relația (1.70) reprezintă forma integrală a legii conducției electrice pentru conductoare filiforme, și în teoria circuitelor cu parametri concentrați se asociază laturii reprezentate în figura 1.7.

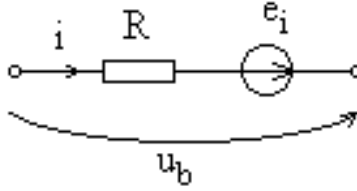


Fig. 1.7

Relația (1.70) se mai poate scrie sub forma:

$$i = G(u_b + e_i), \quad (1.72)$$

numită caracteristica $i(u)$ a laturii. Mărimea $G = 1/R$ se numește *conductanță* și se măsoară în *siemens* $[S]$.

1.6.7. Legea transformării energiei electromagnetice în procesul conducției electrice (legea lui Joule)

Experiența arată că trecerea curentului electric de conducție prin conductoare este însoțită de transformarea energiei electromagnetice în alte forme de energie. Acest fenomen este descris de legea lui Joule:

“Densitatea de volum a puterii cedată de câmpul electromagnetic unui conductor aflat în stare electrocinetică este egală în orice punct cu produsul scalar dintre intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric de conducție”:

$$p_J = \overline{EJ} \quad (1.73)$$

Ținând seama de legea conducției electrice, relația mai poate fi scrisă sub forma:

$$p_J = (\rho \overline{J} - \overline{E_i}) \overline{J} = \rho \overline{J^2} - \overline{E_i J} = p_R - p_e, \quad (1.74)$$

unde $p_R = \rho \overline{J^2} > 0$ și corespunde căldurii disipate în conductor prin efectul electrocaloric al curentului de conducție (efect Joule-Lenz), iar $p_e = \overline{E_i J}$ reprezintă densitatea de putere cedată de sursele de câmp imprimat în procesul de conducție.

După cum vectorii $\overline{E_i}$ și $\overline{J}$ sunt omoparaleli, respectiv antiparaleli, $p_e > 0$, puterea fiind cedată, respectiv $p_e < 0$, puterea fiind primită.

Forma integrală a legii se obține prin integrarea densității de putere pe volumul conductorului filiform, ținând seama că toți vectorii sunt paraleli (Fig. 1.8):

$$P_J = \int_V p_J dV = \int_V (\overline{EJ}) (nA ds) = \int_V (\overline{E} ds) (\overline{JnA}) = \int_C (\overline{E} ds) \int_S (\overline{JnA}) = u_b i. \quad (1.75)$$

Relația (1.75) arată că *“puterea totală cedată de câmpul electromagnetic unei porțiuni de conductor filiform în procesul de conducție electrică este egală cu produsul dintre tensiunea electrică în lungul firului (la borne) și intensitatea curentului electric care parcurge conductorul.”*

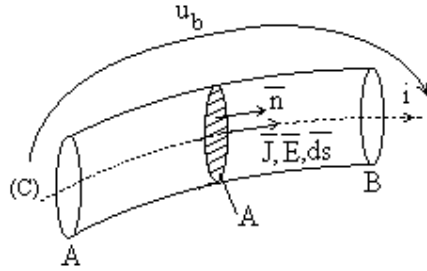


Fig. 1.8

Ținând seama de forma integrală a legii conducției electrice, relația (1.75) se scrie sub forma:

$$P_J = u_b i = R i^2 - e_i i = P_R - P_e, \quad (1.76)$$

unde $P_R = R i^2$ reprezintă puterea disipată în conductor sub formă de căldură, iar $P_e = e_i i$ este puterea generată de sursa de câmp electric imprimat (Fig. 1.7) cu t.e.m. e_i , când este parcursă de curentul electric de conducție i .

Dacă e_i și i au același sens, $P_e > 0$ și sursa cedează energie circuitului, iar dacă e_i și i au sens invers, $P_e < 0$ și sursa primește energie din circuit.

Unitatea de măsură a puterii se numește *watt* [W].

$$1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$$

Integrala de timp a puterii se numește energie. În energetică energia electrică se măsoară în *kilowattoră* [kWh]. Relația dintre diferitele unități de măsură este:

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws} \approx 860 \text{ kcal}.$$

1.6.8. Legea legăturii în câmp electric

”În orice moment de timp și în orice punct din spațiu, indiferent de regimul de variație al mărimilor, între vectorul intensității câmpului electric, al inducției electrice și al polarizației, există relația”:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}, \quad (1.77)$$

unde $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\text{F/m}]$ este constanta universală numită *permitivitatea vidului*.

1.6.9. Legea polarizației temporare

Aceasta este o lege de material care exprimă dependența componentei temporare a polarizației de intensitatea câmpului electric:

$$\overline{P}_t = f(\overline{E}) \quad (1.78)$$

Pentru *materialele izotrope și liniare din punct de vedere electric*, categorie din care fac parte cele mai multe din *materialele dielectrice* folosite în industria electrotehnică, această dependență este dată de relația:

$$\overline{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}, \quad (1.79)$$

în care χ_e este susceptivitatea electrică a materialului, mărime adimensională, depinzând de natura materialului și de condiții neelectrice locale (temperatură, presiune etc.). Aceste materiale nu prezintă polarizație permanentă.

- Sub acțiunea unui câmp electric exterior, sarcinile pozitive și negative inseparabile ale atomilor se deplasează elastic, orientându-se după direcția câmpului, formând mici dipoli electrici. Fenomenul se numește *polarizație de deformare* și se manifestă la **materialele dielectrice** (hidrogen, oxigen, azot).
- În cazul altor materiale, momentele electrice se aliniază cu vectorul intensității câmpului electric în funcție de temperatură. Ele se numesc **paraelectrice**, iar fenomenul - *polarizare de orientare*.

În aplicații, legea polarizației temporare se combină cu legea legăturii în câmp electric. Astfel:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}_t = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e \overline{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E} . \quad (1.80)$$

Notând $1 + \chi_e = \varepsilon_r$ permitivitatea relativă a materialului și $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$ permitivitatea sa absolută, relația (1.80) devine:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} . \quad (1.81)$$

În Tabelul 1.3. se dau valorile unor materiale dielectrice uzuale.

Tabelul 1.3.

Denumire material	ε_r	Denumire material	ε_r
Aer la 760 mmHg, 0°C	1,0006	Mică	4,5...7,5
Apă distilată	80...81	Parafină	1,9...2,3
Bachelită	4,5...5,5	Porțelan	5,5...8
Cauciuc	2,6...3	Preșpan	3...5
Izolație cablu telefonie (hirtie-aer)	1,6...2	Pertinax	3,5...7
Izolație cablu energie (hirtie-ulei)	3...4,3	Polistiroil	2,3
Polietilenă	2...2,4	Sticlă	5...10
Lemn uscat	2,5...5	Sticlă de cuarț	3,2...4,2
Ulei de transformator	2,2...2,5	Șelac	2,9...3,7

Observații:

1. În cazul *materialelor anizotrope* cum sunt cristalele, inducția electrică, în absența polarizației permanente, nu este paralelă cu intensitatea câmpului electric decât pe anumite direcții, numite principale. În acest caz susceptivitatea electrică, respectiv permitivitatea, se exprimă ca tensori de ordinul 2.

2. Anumite substanțe numite *feroelectrice*, cum sunt titanatul de bariu și tetrahidratul de potasiu prezintă o polarizare neliniară foarte puternică (ε_r de sute sau mii) și ireversibilă, prezentând fenomenul de histerezis.

Străpungerea dielectricilor

Calitatea de electroizolant a unui material dielectric poate dispărea dacă intensitatea câmpului electric depășește o anumită valoare limită E_d , numită *rigiditate dielectrică*. Aceasta depinde de natura, de puritatea și de capacitatea de cedare a căldurii caracteristice materialului, de forma electrozilor metalici între care se face încercarea, de distanța dintre ei, de durata aplicării tensiunii, de presiune, de umiditate, de temperatură etc. În consecință, rigiditatea dielectrică nu este o constantă de material și trebuie specificate condițiile în care a fost determinată. Străpungerea electroizolanților solizi poate avea mai multe cauze. În afara depășirii rigidității dielectrice, o cauză importantă este îmbătrânirea acestor materiale. Acest fenomen, care, în condiții normale de funcționare, se desfășoară într-o perioadă determinată de timp, se accelerează în condiții de funcționare în suprasarcină a conductoarelor izolate. Depășirea temperaturilor maxime admisibile pentru clasa de temperatură a izolației, conduce la deteriorarea proprietăților fizico-chimice ale materialului, la apariția de incluziuni de gaze care se ionizează sub influența câmpului electric, devenind regiuni conductoare. Are loc astfel o reducere a rigidității dielectrice a materialului și străpungerea acestuia.

1.6.10. Legea legăturii în câmp magnetic

”În orice moment de timp și în orice punct din spațiu, indiferent de regimul de variație al mărimilor, între vectorul intensității câmpului magnetic, al inducției magnetice și al magnetizației, există relația”:

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}), \quad (1.82)$$

unde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}]$ este o constantă universală numită *permeabilitatea vidului*.

1.6.11. Legea magnetizației temporare

Această lege de material exprimă dependența componentei temporare a magnetizației de intensitatea câmpului magnetic:

$$\overline{M}_t = f(\overline{H}) \quad (1.83)$$

Pentru *materialele izotrope și liniare din punct de vedere magnetic*, categorie din care fac parte toate *materialele feromagnetice* cu excepția magneților permanenți, această dependență este dată de relația:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}, \quad (1.84)$$

în care χ_m este susceptivitatea magnetică a materialului, mărime adimensională, depinzând de natura materialului, de starea lui de deformare și de temperatură.

În tehnică, legea se folosește în combinație cu legea legăturii în câmp magnetic:

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}) = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}_t) = \mu_0 (\overline{H} + \chi_m \overline{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H}. \quad (1.85)$$

Notând cu $1 + \chi_m = \mu_r$, permeabilitatea relativă a materialului și cu $\mu_0 \mu_r = \mu$, permeabilitatea sa absolută, relația (1.85) devine:

$$\overline{B} = \mu \overline{H}. \quad (1.86)$$

Din punct de vedere al modului în care se magnetizează, materialele se clasifică în:

- **materiale diamagnetice** care se magnetizează în sens opus câmpului magnetic aplicat ($\overline{M}_t \uparrow \downarrow \overline{H}$); au $\chi_m < 0$, deci $\mu_r < 1$.

- **materiale paramagnetice** care se magnetizează în sensul câmpului magnetic aplicat ($\overline{M}_i \uparrow \uparrow \overline{H}$) și dependent de temperatură; au $\chi_m > 0$, deci $\mu_r > 1$.

Materialele diamagnetice și paramagnetice alcătuiesc clasa **materialelor neferomagnetice** (din care fac parte: Cu, Ag, Al, Pt, aerul) caracterizate printr-o relație (1.86) liniară și printr-o valoare a permeabilității relative $\mu_r \approx 1$, ceea ce înseamnă o permeabilitate absolută $\mu \approx \mu_0$. În Tabelul 1.4 sunt prezentate valorile susceptivității magnetice ale materialelor neferomagnetice.

Tabelul 1.4

Materiale diamagnetice	χ_m	Materiale paramagnetice	χ_m
Bismut	$-170 \cdot 10^{-6}$	Aluminiu	$22 \cdot 10^{-6}$
Cupru	$-10 \cdot 10^{-6}$	Platină	$330 \cdot 10^{-6}$
Argint	$-19 \cdot 10^{-6}$	Mangan	$3600 \cdot 10^{-6}$
Mercur	$-25 \cdot 10^{-6}$	Aer	$0,4 \cdot 10^{-6}$
Apă	$-9 \cdot 10^{-6}$	Oxygen	$1,42 \cdot 10^{-6}$
Zinc	$-12 \cdot 10^{-6}$		

O clasă specială o constituie **materialele feromagnetice**, care se magnetizează foarte puternic, neliniar și ireversibil, prezentând histerezis și magnetizație permanentă. Din această clasă fac parte Fe, Co, Ni, Ga și unele aliaje, pentru care relația (1.86) este neliniară ca urmare a dependenței permeabilității μ de intensitatea câmpului magnetic H . Caracteristica $B(H)$ numită curbă de histerezis magnetic este reprezentată în Fig. 1.9.

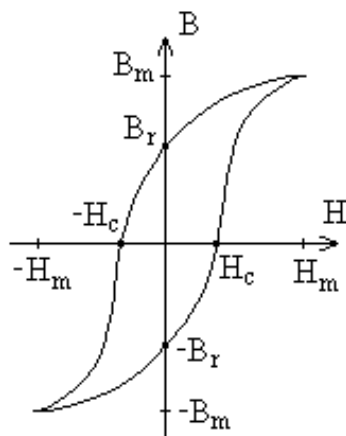


Fig. 1.9

B_r reprezintă inducția remanentă, iar H_c este câmpul coercitiv.

Aria închisă de ciclul de histerezis corespunde unei densități de volum a energiei care se transformă în căldură, prin frecări interne, la fiecare parcurgere a ciclului. Ea este proporțională cu energia de magnetizare a acestor materiale.

Caracteristic pentru aceste materiale este valoarea foarte ridicată a permeabilității relative (de ordinul $10^2 \dots 10^5$), ceea ce, conform relației (1.86) determină obținerea unor inducții magnetice (respectiv a unor energii magnetice) de valoare mare, la valori relativ reduse ale intensității câmpului magnetic.

După forma ciclului de histerezis materialele feromagnetice se clasifică în:

- *Materiale magnetice moi*, caracterizate printr-un ciclu de histerezis îngust. Aceste materiale se magnetizează și se demagnetizează relativ ușor; ele se folosesc pentru realizarea circuitelor magnetice ale mașinilor, aparatelor și transformatoarelor electrice. Din această categorie fac parte: Fier pur, Oțel electrotehnic (aliat cu 4% Si), diverse aliaje (Permalloy, Supermalloy). În afara proprietăților magnetice, aceste materiale au și proprietăți conductoare, ceea ce face ca în timpul funcționării, în circuitele magnetice ale dispozitivelor respective să apară două categorii de pierderi: prin histerezis (P_H) și prin curenții turbionari (curenți Foucault) care se induc în aceste materiale (P_F).
- *Materiale magnetice dure*, care au un ciclu de histerezis larg. Aceste materiale se magnetizează și se demagnetizează relativ greu; ele se folosesc pentru realizarea magneților permanenți. Din această categorie fac parte Oțelul călit (cu 1% C), Ol-Cr, Ol-W), Alnico etc.

În Tabelul 1.5 sunt date caracteristicile unor materiale magnetice moi, iar în Tabelul 1.6 ale unor materiale magnetice dure.

Tabelul 1.5

Materialul	μ_r inițială	max	B_r [T]	H_c [A/m]
Fier pur	25.000	250.000	1,40	4
Oțel electrotehnic (cu 4% Si)	500	7.000	1,80	40
Permalloy (78,5%Ni, 21,5%Fe)	10.000	50.000	0,60	4
Supermalloy (79%Ni, 15%Fe, 5%Mo, 0,5%Mn)	100.000	300.000	0,60	0,4
Ferită de mangan-zinc	2.000	3.000	0,15	20
Ferită de nichel-zinc	15	50	0,13	10

Tabelul 1.6

Materialul	μ_r inițială	B_r [T]	H_c [A/m]
Oțel călit (cu 1% C)	40	0,7	5.000
Oțel crom, oțel wolfram	30	1,1	5.000
Alnico (12%Al, 20%Ni, 5%Co, 63%Fe)	4	0,73	34.000
Oerstit 900 (20%Ni, 30%Co, 20%Ti, 30%Fe)	3	0,53	65.000
Aliaj Pt Co (77%Pt, 23%Co)	1	0,45	260.000
Ferită de bariu	1,2	0,3...0,4	150.000...250.000
Ferită de cobalt	1,1	0,16	90.000

Materialele ferimagnetice (*ferite*) au o structură asemănătoare celor feromagnetice, dar fiind materiale semiconductoare, caracterizate prin rezistivitate mare ($10^2 \dots 10^6 \Omega m$). Feritele tehnice sunt materiale ceramice obținute prin sinterizare în câmpuri magnetice. Ele pot fi moi sau dure.

- *Feritele magnetice moi* se pot folosi în dispozitivele de frecvență joasă sau înaltă ca piese masive, datorită faptului că fiind dielectrice, în ele nu se produc pierderi prin curenți turbionari. Se folosesc pentru realizarea circuitelor magnetice ale mașinilor electrice mici, miezuri de bobine, transformatoare sau ca antene magnetice (ferite de Mn-Zn sau Ni-Zn la care permeabilitatea maximă se atinge la temperaturi de aproximativ $30^0 C$).
- *Feritele magnetice dure* se folosesc pentru realizarea magneților permanenți (în mașini electrice, în difuzoare etc.) sau a memoriilor magnetice (ferite de Bariu sau Cobalt – maniperm, magnadur, baferit etc.).

1.6.12. Legea electrolizei

Această lege caracterizează electroliții (conductoare de speța a doua în care trecerea curentului de conducție este însoțită de reacții chimice) și se enunță astfel: “*Masa de substanță depusă în unitatea de timp la unul din electrozii unei băi electrolitice parcursă de curent de conducție, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului electric i și raportul dintre echivalentul electrochimic A/n_v , prin constanta universală a lui Faraday, F_0* ”:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{A}{n_v F_0} i, \quad (1.87)$$

în care $F_0 = 96\,490$ coulombi. În intervalul de timp t , masa m are expresia:

$$m = \frac{A}{n_v F_0} \int_0^t i d\tau = \frac{Aq}{n_v F_0}, \quad (1.88)$$

în care $q = \int_0^t i d\tau$ este sarcina electrică, iar echivalentul electrochimic al substanței este o mărime de material.

CAPITOLUL 2

ELECTROSTATICA

2.1. RELAȚII FUNDAMENTALE ÎN REGIM ELECTROSTATIC

În regim electrostatic legile corespunzătoare câmpului electric au forme particulare. Astfel:

1. *Legea conservării sarcinii unui sistem de corpuri izolat electric:*

“Suma algebrică a sarcinilor unui sistem de corpuri izolat electric este invariabilă în timp”:

$$\sum q_k = q_\Sigma = \text{const.} \quad (2.1)$$

2. *Legea legăturii în câmp electric, legea polarizației temporare și legea fluxului electric își păstrează formele.*

3. *Legea inducției electromagnetice capătă forma*

$$e_\Gamma = \int_\Gamma \overline{E} d\overline{s} = 0, \quad (2.2)$$

numită **teorema potențialului electrostatic**. Relația (2.2) arată că circulația intensității câmpului electrostatic este nulă pe orice curbă închisă. Consecințe ale teoremei:

3.1. În câmp electrostatic nu există linii de câmp închise.

Demonstrație: dacă ar exista, $\overline{E} d\overline{s}$ ar avea același semn și integrala ar fi în general diferită de zero și egală cu zero numai pentru $E = 0$.

3.2. În câmp electrostatic tensiunea electrică între două puncte nu depinde de drum (de curba de integrare).

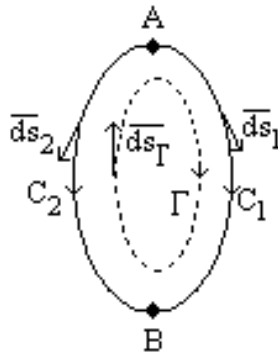


Fig. 2.1

Demonstrație:

Considerăm curba închisă $\Gamma = C_1 \cup C_2$ și aplicând relația (2.2) obținem

$$\int_\Gamma \overline{E} d\overline{s}_\Gamma = \int_{C1(AB)} \overline{E} d\overline{s}_\Gamma + \int_{C2(BA)} \overline{E} d\overline{s}_\Gamma = \int_{C1(AB)} \overline{E} d\overline{s}_1 - \int_{C2(AB)} \overline{E} d\overline{s}_2 = 0$$

Ținând seama de relația de definiție a tensiunii electrice rezultă

$$u_{AB(C1)} = u_{AB(C2)} = u_{AB}.$$

3.3. În câmp electrostatic se poate defini o funcție scalară de punct numită *potențial electric*, astfel încât $dV = -\overline{E} d\overline{s}$. Integrând relația de-alungul unei curbe care trece prin punctul curent P și un punct arbitrar P_0 se obține

$$\int_{P_0}^P dV = V(P) - V(P_0) = - \int_{P_0}^P \overline{E} ds,$$

din care rezultă

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^P \overline{E} ds, \quad (2.3)$$

curba pe care se calculează integrala fiind arbitrară. Intensitatea câmpului electric se poate exprima în funcție de acest potențial cu relația:

$$\overline{E} = -\text{grad } V. \quad (2.4)$$

Relația (2.4) reprezintă forma locală a teoremei potențialului electrostatic. O altă formă locală pentru domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice se poate obține aplicând teorema lui Stokes expresiei (2.2):

$$\text{rot } \overline{E} = 0. \quad (2.5)$$

Relația (2.5) reprezintă forma pentru regim static a relației (1.46).

Suprafețele pe care potențialul ia valori constante se numesc *suprafețe echipotențiale*.

3.4. Tensiunea electrică între două puncte din câmp electrostatic poate fi exprimată ca diferența potențialelor celor două puncte.

Demonstrație: Notând punctul curent A și punctul arbitrar B conform relației (2.5) rezultă:

$$V(A) = V(B) - \int_B^A \overline{E} ds = V(B) + \int_A^B \overline{E} ds,$$

de unde se obține

$$u_{AB} = V(A) - V(B). \quad (2.6)$$

2.2. TEOREMA UNICITĂȚII ȘI SUPERPOZIȚIEI CÂMPURILOR ELECTROSTATICE

Teorema unicității. Câmpul electrostatic dintr-un domeniu al spațiului ocupat de un mediu dielectric cu permitivitatea dată și independentă de câmp, este univoc determinat de:

- repartitia în spațiu a *sarcinilor electrice adevărate* din domeniul respectiv și de *componenta normală a intensității câmpului electric* pe suprafețele-frontieră ale domeniului (teorema lui Neumann);
- repartitia în spațiu a *sarcinilor electrice adevărate* și de repartitia *potențialului electrostatic* pe suprafețele-frontieră ale domeniului (teorema lui Dirichlet).

Dacă suprafețele-frontieră se depărtează la infinit, repartitia în spațiu a sarcinii găsindu-se numai într-un domeniu mărginit, condițiile la limită sunt

$$Er^2 = \text{const.} \text{ sau } Vr = \text{const.} \quad (2.7)$$

Teorema superpoziției câmpurilor electrostatice. Intensitatea câmpului electric rezultat produs de n corpuri cu distribuții de sarcină electrică adevărată $\rho_k(\vec{r})$, $k=1,2,\dots,n$, situate într-un mediu liniar, într-o regiune mărginită a spațiului, este egală cu suma intensităților câmpurilor electrice care s-ar produce dacă ar exista fiecare distribuție în parte, în lipsa celorlalte. În cazul particular a n conductoare în regim electrostatic și având potențialele $V_1, V_2, \dots, V_n$ (cu $V_\infty = 0$), potențialul rezultat V , într-un punct are expresia:

$$V(\bar{r}) = \sum_{k=1}^n v_k(\bar{r}_k) V_k, \quad (2.8)$$

unde $v_k(\bar{r}_k)$ este potențialul în punctul considerat, în ipoteza că potențialul conductorului k ar fi egal cu unitatea, potențialele tuturor celorlalte conductoare fiind nule.

Formă particulară a teoremei: dacă potențialul punctelor de la infinit este nul și dacă sarcinile electrice adevărate ale tuturor conductoarelor cresc de λ ori, atunci potențialele conductoarelor, respectiv potențialul fiecărui punct din spațiu, cresc de λ ori.

2.3. CONDUCTOARE ÎN CÂMP ELECTROSTATIC

În regim electrostatic $\bar{J} = 0$ și legea conducției electrice sub forma locală (1.64) devine

$$\bar{E} + \bar{E}_i = 0, \quad (2.9)$$

numită condiția de echilibru electrostatic.

În cazul conductoarelor omogene și neaccelerate, câmpul electric imprimat este nul,

$$\bar{E}_i = 0, \quad (2.10)$$

și, prin urmare, câmpul electrostatic în aceste conductoare este nul în orice punct:

$$\bar{E} = 0. \quad (2.11)$$

O consecință a acestui fapt, este că la introducerea într-un câmp electric, un conductor neutru se electrizează. Fenomenul, denumit *electrizare prin influență*, constă în repartizarea unor sarcini electrice pe suprafața conductorului, fără modificarea sarcinii sale totale (nule în cazul conductoarelor neutre), astfel încât câmpul electric determinat de această repartiziție de sarcină să anuleze câmpul exterior în toate punctele din interiorul conductorului pentru a satisface relația (2.11).

Proprietățile conductoarelor omogene și neaccelerate în regim electrostatic sunt:

1. Intensitatea câmpului electrostatic în interiorul acestor conductoare este nulă. În fiecare punct al suprafeței acestor conductoare câmpul electrostatic are numai componentă normală pe suprafață.

Demonstrație: Dacă ar exista și o componentă tangențială, particulele purtătoare de sarcini electrice s-ar deplasa în conductor sau pe suprafața sa, deci $\bar{J} \neq 0$ și nu ar fi îndeplinită condiția de echilibru electrostatic.

2. Toate punctele din interiorul unui conductor au același potențial. Deci suprafețele acestor conductoare sunt echipotențiale și liniile de câmp sunt perpendiculare pe ele.

Demonstrație: $\bar{E} = 0$, deci $u_{AB} = \int_{\Gamma} \bar{E} d\bar{s} = V(A) - V(B) = 0$, de unde rezultă $V(A) = V(B)$.

3. Sarcina electrică a conductoarelor este repartizată superficial, iar sarcina din interiorul conductoarelor este nulă.

Demonstrație: Deoarece în interiorul conductorului $\bar{E} = 0$, din (1.5.51) rezultă $\bar{D} = 0$, din relația de definiție rezultă că fluxul electric prin orice suprafață închisă Σ din interiorul conductorului este nul, iar din legea fluxului electric rezultă că sarcina electrică din volumul delimitat de Σ este nulă.

4. Inducția electrică este normală pe suprafața acestor conductoare și numeric egală în orice punct cu densitatea superficială a sarcinii electrice.

Demonstrație: Inducția este normală pe suprafață ca o consecință a primei proprietăți. Pe de altă parte, din forma locală la suprafețe de discontinuitate a legii fluxului electric $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, deoarece în conductor $D_{1n}=0$ (proprietatea 3), rezultă pe suprafață $D = \rho_s$.

5. În cavitățile fără sarcini electrice din interiorul conductoarelor câmpul electric este nul (efect Faraday). Acest efect se folosește în instalațiile de î.t. pentru ecranarea (prin conductoare legate la pământ) a locurilor de observație în care se află personal operator.

6. Orice suprafață echipotențială din câmp poate fi înlocuită cu o suprafață conductoare fără a perturba câmpul (principiul metalizării suprafețelor echipotențiale).

2.4. TUB DE FLUX ELECTRIC

Se numește *tub de flux electric* porțiunea de câmp delimitată de totalitatea liniilor de câmp care trec prin toate punctele unui contur închis Γ (Fig. 2.2).

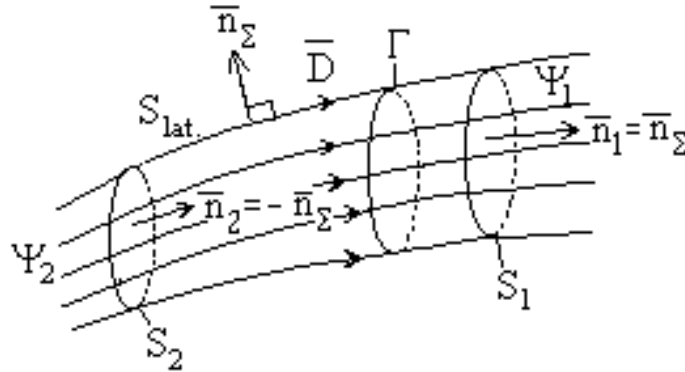


Fig. 2.2

Se consideră o suprafață închisă $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$ pe care se aplică legea fluxului electric. Sensul fluxurilor Ψ_1 și Ψ_2 prin cele două suprafețe S_1 și S_2 este indicat de versorii celor două normale $\bar{n}_1$ respectiv $\bar{n}_2$ la cele două suprafețe. Deoarece pe suprafața laterală $\bar{n}_\Sigma \perp \bar{D}$ rezultă că prin această suprafață fluxul este nul și

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \bar{D} \bar{n}_\Sigma dA = \int_{S_1} \bar{D} \bar{n}_\Sigma dA + \int_{S_2} \bar{D} \bar{n}_\Sigma dA = \int_{S_1} \bar{D} \bar{n}_1 dA - \int_{S_2} \bar{D} \bar{n}_2 dA = \Psi_1 - \Psi_2 = q_{V\Sigma}.$$

Dacă în interiorul suprafeței Σ nu există sarcini electrice

$$\Psi_1 = \Psi_2. \quad (2.12)$$

Rezultă că în regiunile din spațiu în care nu există sarcini electrice, fluxul câmpului electric prin orice secțiune transversală a unui tub de flux are aceeași valoare. Aceasta reprezintă proprietatea de *conservare a fluxului electric* de-a lungul unui tub de linii de câmp.

2.5. TEOREMA REFRAȚIEI LINIILOR DE CÂMP ELECTRIC

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate între două medii cu permitivități diferite ϵ_1 și ϵ_2 liniile de câmp electric se refractă. Calculând raportul dintre tangenta unghiului de incidență (α_1) și a unghiului de refracție (α_2) se obține:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{D_{1t} / D_{1n}}{D_{2t} / D_{2n}} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1 E_{1t}}{\epsilon_2 E_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2.13)$$

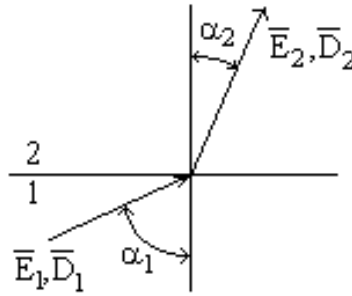


Fig. 2.3

În prelucrarea relației (2.13) s-a ținut seama de:

- forma locală a legii fluxului electric la suprafețe de discontinuitate neîncărcate cu sarcină electrică $D_{2n} = D_{1n}$;
- relația dintre inducția electrică și intensitatea câmpului electric în medii liniare $D = \varepsilon E$;
- forma locală la suprafețe de discontinuitate a legii inducției electromagnetice $E_{t2} = E_{t1}$.

Relația (2.13) arată că la ieșirea dintr-un material cu permitivitate mai mare într-unul cu permitivitate mai mică ($\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$), liniile de câmp electric se apropie de normală ($\alpha_2 \rightarrow 0$).

2.6. APLICAȚII

Aplicația 1. Calculul intensității câmpului electric produs de un corp punctiform încărcat cu sarcina q (Fig. 2.4).

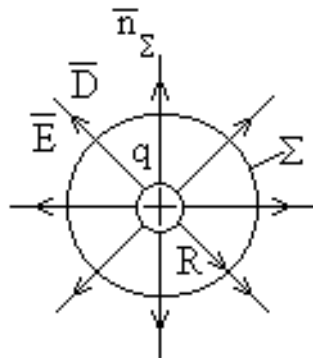


Fig. 2.4

Aplicând legea fluxului electric, rezultă:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{Dn}_{\Sigma} dA = D(R) \int_{\Sigma} dA = D(R) \cdot 4\pi R^2 = q_{V\Sigma} ,$$

de unde, ținând seama de relația dintre intensitatea câmpului electric și inducție, se obține intensitatea câmpului electric în orice punct de pe suprafața Σ

$$E(R) = \frac{D(R)}{\varepsilon_0} = \frac{q_{V\Sigma}}{4\pi \varepsilon_0 R^2} .$$

Aplicația 2. Să se calculeze intensitatea câmpului electric și potențialul electric produs de o sferă de rază R_0 uniform încărcată cu densitatea superficială de sarcină $\rho_s = \text{const.}$ (Fig. 2.5).

Se calculează cele două mărimi în două domenii: în interiorul și în exteriorul sferei încărcate cu sarcină.

Datorită simetriei sferice, liniile câmpului electric sunt radiale. Se consideră o suprafață închisă Σ de rază R și se aplică legea fluxului electric.

a) Pentru $R > R_0$

$$\Psi_{\Sigma R} = \int_{\Sigma R} \overline{D(R)} \cdot \overline{n_{\Sigma}} dA = \varepsilon_0 E(R) \int_{\Sigma R} dA = \varepsilon_0 E(R) \cdot 4\pi R^2,$$

$$q_{V_{\Sigma}} = \int_{\Sigma} \rho_s dA = \rho_s \int_{\Sigma} dA = \rho_s \cdot 4\pi \cdot R_0^2.$$

Egalând cele două relații rezultă intensitatea câmpului electric

$$E(R) = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \frac{R_0^2}{R^2}.$$

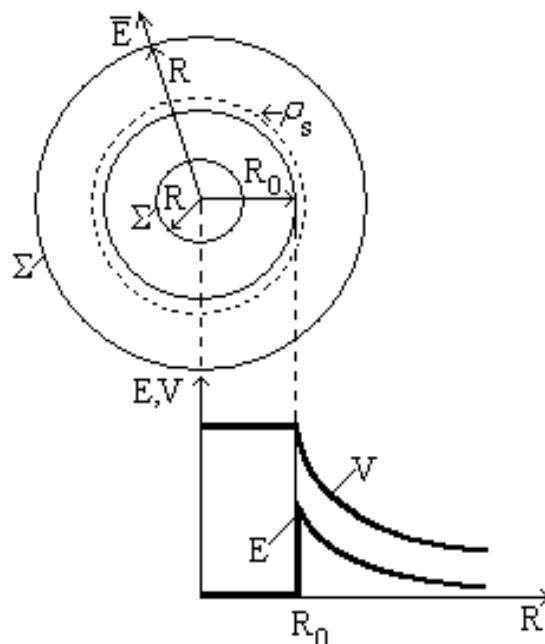


Fig. 2.5

Presupunând potențialul punctelor de la infinit nul, potențialul electric produs într-un punct la distanța R de centrul sferei se calculează cu relația

$$V(R) = V(\infty) - \int_{\infty}^R \overline{E} ds = \int_R^{\infty} \overline{E} ds = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{R_0^2}{R^2} dR = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \frac{R_0^2}{R}.$$

b) Pentru $R < R_0$, $q_{V_{\Sigma}} = 0$, din legea fluxului electric rezultă $\Psi_{\Sigma} = 0$, deci $D(R) = 0$ și $E(R) = 0$.

Pentru $R \leq R_0$, potențialul electric este constant și are valoarea $V(R) = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} R_0$.

În figura 2.5 este reprezentată variația celor două mărimi în raport cu R .

Aplicația 3. Să se calculeze intensitatea câmpului electric și potențialul produse de un plan încărcat cu densitatea de suprafață a sarcinii electrice $\rho_s = \text{const.}$ (Fig. 2.6).

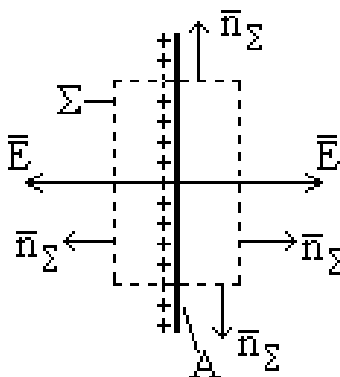


Fig. 2.6

Din considerente de simetrie câmpul este perpendicular pe plan și nu depinde de distanța la plan. Aplicând legea fluxului electric pe suprafața Σ și ținând seama că fluxul este diferit de zero numai prin suprafețele paralele cu planul, se obține:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{Dn_{\Sigma}} dA = \varepsilon_0 EA + \varepsilon_0 EA = 2\varepsilon_0 EA,$$

$$q_{V\Sigma} = \rho_s A,$$

deci $E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}.$

Considerând punctul de referință pe plan, calculul potențialului se face cu relația

$$V(P) = -\int_0^P \overline{E} dr = -Er = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} r, \text{ în semiplanul drept și egal, dar cu semn scimbat în}$$

semiplanul stâng.

Aplicația 4. Să se calculeze intensitatea câmpului electric și potențialul produse de un fir rectiliniu, infinit, încărcat cu sarcina lineică $\rho_l = \text{const.}$ (Fig. 2.7).

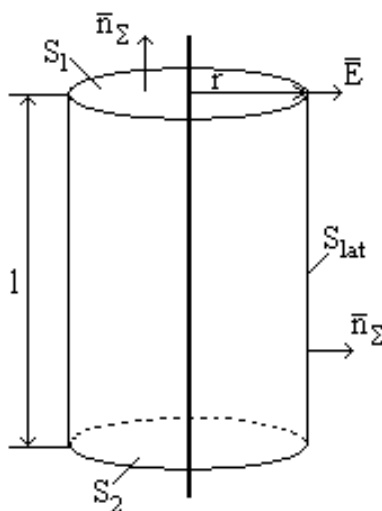


Fig. 2.7

Din motive de simetrie câmpul este radial și în plane perpendiculare pe fir. Se consideră o suprafață închisă de formă cilindrică $\Sigma = S_1 \cup S_{lat} \cup S_2$, pe care se aplică legea fluxului electric. Cum normala $\overline{n_\Sigma}$ este perpendiculară pe $\overline{E}$ pe cele două baze ale cilindrului, rezultă că fluxul electric prin suprafețele S_1 și S_2 este nul. În consecință

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{Dn_\Sigma} dA = \int_{S_{lat}} \overline{Dn_\Sigma} dA = \varepsilon_0 E \int_{S_{lat}} dA = \varepsilon_0 E \cdot 2\pi r l.$$

Sarcina electrică din interiorul cilindrului fiind $q_{V\Sigma} = \rho_l l$, rezultă că intensitatea câmpului electric în toate punctele suprafeței laterale de rază r este

$$E = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Calculând potențialul electric, considerând potențialul de referință zero, se obține

$$V(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^r \overline{E} ds = - \int_{r_0}^r \overline{E} ds = - \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r},$$

numit *potențial logaritm*. Dacă se consideră punctul de referință la $r_0 = 1$, expresia devine

$$V(r) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r},$$

formă sub care va fi utilizată la calculul capacității liniei electrice bifilare.

Aplicația 5. Calculul câmpului electric produs de stratul dublu. Acesta este format din două plane paralele, încărcate superficial uniform cu densități de sarcină egale și de semn contrar (Fig. 2.6.5). Câmpul se determină cu teorema superpoziției, considerând succesiv un plan încărcat cu ρ_s și care determină câmpul $\overline{E}_1$, apoi celălalt, încărcat cu $-\rho_s$, care determină câmpul $\overline{E}_2$.

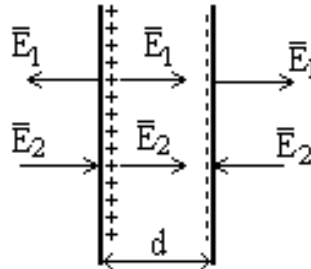


Fig. 2.8

După cum se observă din figura 2.8. în exteriorul stratului dublu câmpul rezultat este nul, în timp ce în interior el este dublu și orientat de la planul încărcat cu sarcină pozitivă, la cel încărcat cu sarcină negativă. Ținând seama de rezultatul obținut la aplicația 2, rezultă

$$E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}.$$

Circulația intensității câmpului electric între cele două plane reprezintă tensiunea electrică

$$u = \int_1^2 \overline{E} ds = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} d.$$

2.7. CONDENSATOARE ȘI CAPACITĂȚI ELECTRICE

2.7.1. Capacitatea electrică

Condensatorul electric este un sistem format din două corpuri conductoare omogene, numite armături, între care există un mediu dielectric omogen sau neomogen, neîncărcat electric, fără polarizație permanentă. Când se aplică o tensiune între armături, acestea se încarcă cu sarcini egale și de semn contrar. Mărimea ce caracterizează un condensator electric se numește *capacitate electrică* și se definește ca raportul pozitiv dintre sarcina electrică cu care se încarcă o armătură și tensiunea electrică aplicată:

$$C = \frac{q}{U} > 0. \quad (2.14)$$

Capacitatea este constantă pentru un condensator cu dielectric liniar ($\varepsilon = \text{ct.}$) și depinde numai de natura dielectricului, de dimensiunile armăturilor și de distanța dintre ele. Unitatea de măsură a capacității este *faradul* [F]: $1\text{F} = 1\text{C}/1\text{V}$. Fiind prea mare pentru unitățile realizate, în practică se folosesc submultipli săi:

microfaradul : $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$

nanofaradul: $1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$

picofaradul: $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$.

2.7.2. Calculul capacităților

1. Calculul capacității condensatorului plan.

Capacitatea condensatorului plan (Fig. 2.9) poate fi calculată cu ajutorul legii fluxului electric aplicată pe o suprafață închisă ce trece printr-o armătură și prin dielectric, sau pe baza proprietăților conductoarelor omogene.

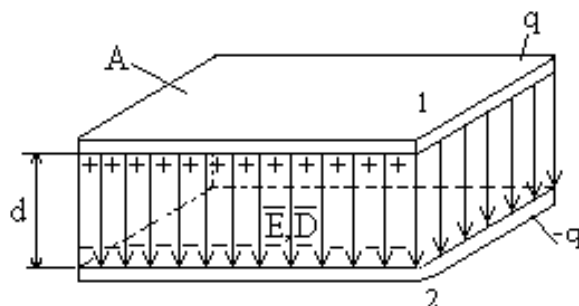


Fig. 2.9

Armăturile condensatorului fiind conductoare omogene, sarcina electrică cu care se încarcă este repartizată pe suprafața lor dinspre dielectric, cu o densitate egală în fiecare punct cu inducția electrică. Ținând seama de relațiile din capitolul 1 se obține capacitatea condensatorului plan:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{\frac{D}{\varepsilon}d} = \frac{q}{\frac{\rho_s}{\varepsilon}d} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon A}d} = \frac{\varepsilon A}{d}, \quad (2.15)$$

unde ε este permitivitatea dielectricului, A – aria armăturilor și d distanța dintre ele.

În cazul unui condensator plan cu dielectric neomogen relația de mai sus devine:

$$C = A \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{d_k}. \quad (2.16)$$

2. Calculul capacității condensatorului cilindric.

Condensatorul cilindric are armăturile de formă cilindrică (Fig. 2.10). Când se aplică o tensiune la bornele condensatorului, armătura interioară de rază R_1 se încarcă cu sarcină pozitivă, iar cea exterioară, de rază R_2 , se încarcă cu sarcină negativă.

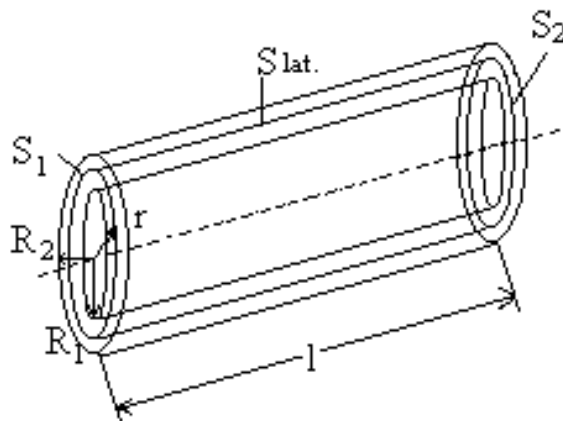


Fig. 2.10

Alegând o suprafață închisă de formă cilindrică, $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$, cu raza r , aplicând legea fluxului electric și ținând seama de faptul că fluxul electric prin suprafețele S_1 și S_2 este nul (liniile de câmp sunt orientate pe direcția razei, de la armătura interioară la cea exterioară) rezultă

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{Dn_{\Sigma}} dA = \int_{S_{lat}} \overline{Dn_{\Sigma}} dA = \int_{S_{lat}} D dA = D \cdot 2\pi r l = q, \quad (2.17)$$

unde q reprezintă sarcina cu care se încarcă armătura interioară.

Calculând D , E și apoi U între armături, rezultă:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.18)$$

În cazul unui dielectric neomogen cu n straturi, relația devine:

$$C = \frac{2\pi l}{\sum_{k=1}^n \frac{\ln \frac{R_{k+1}}{R_k}}{\epsilon_k}}. \quad (2.19)$$

2.7.3. Capacități echivalente

Condensatoarele electrice se pot conecta între ele prin fire conductoare, realizându-se astfel rețele sau circuite pasive (fără surse). Întregul circuit dipolar se poate înlocui cu un condensator echivalent de capacitate C_e (Fig. 2.11), fără ca mărimile electrice din exteriorul circuitului să fie afectate.

Se numește capacitate echivalentă a unui circuit dipolar pasiv și inițial neîncărcat electric, raportul dintre sarcina absorbită în timpul încărcării pe la borna A (B) și tensiunea între bornele A,B (B,A).

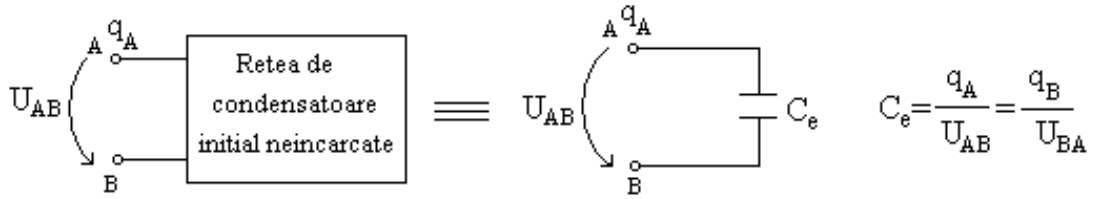


Fig. 2.11

O rețea pasivă de condensatoare, oricât de complicată ar fi, se poate descompune în subrețele în care condensatoarele sunt legate în serie, în paralel, în stea sau în triunghi.

a) Conexiune serie

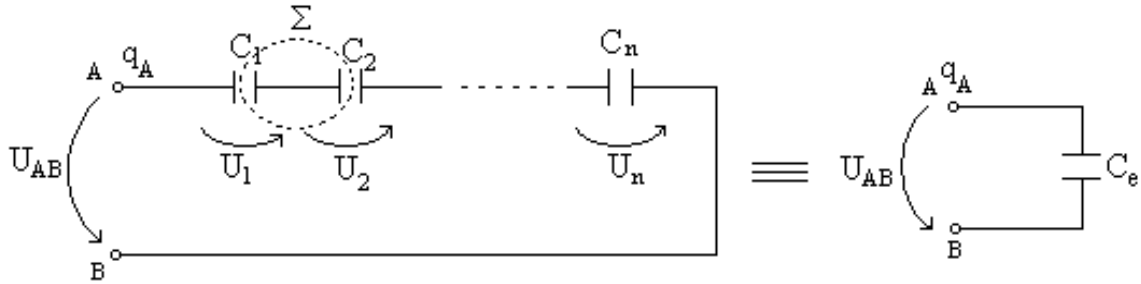


Fig. 2.12

Aplicând *legea conservării sarcinii electrice* pe o suprafață Σ ce trece prin dielectricul a două condensatoare alăturate, (Fig. 2.12), rezultă:

$$q_{\Sigma} = ct. \Rightarrow -q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = q_A, \quad (2.20)$$

adică n condensatoare conectate în serie se încarcă cu aceeași sarcină.

Conform *teoremei potențialului electrostatic* tensiunea electrică nu depinde de drum, deci

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \dots + U_k + \dots + U_n. \quad (2.21)$$

Prelucrând relația (2.21) în funcție de definiția capacității se obține

$$\frac{q_A}{C_e} = \frac{q_A}{C_1} + \frac{q_A}{C_2} + \dots + \frac{q_A}{C_n} = q_A \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}, \quad (2.22)$$

din care rezultă relația de echivalență pentru conexiunea serie

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (2.23)$$

b) Conexiunea paralel

Teorema potențialului electrostatic conduce la relația

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U_{AB}. \quad (2.24)$$

Din *legea conservării sarcinii electrice* aplicată în nodul A (Fig. 2.13) rezultă:

$$q_A = q_1 + q_2 + \dots + q_k + \dots + q_n \quad (2.25)$$

și aplicând relația de definiție a capacității se obține

$$U_{AB} C_e = U_{AB} \sum_{k=1}^n C_k, \quad (2.26)$$

de unde rezultă relația de echivalență pentru conexiunea paralel

$$C_e = \sum_{k=1}^n C_k. \quad (2.27)$$

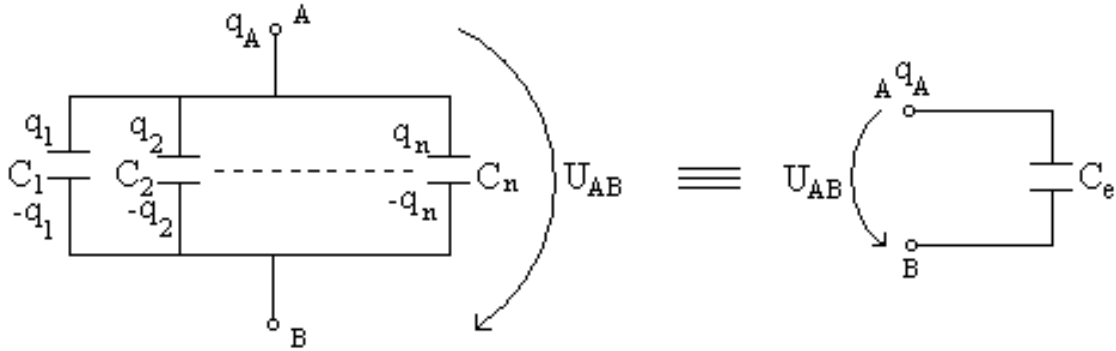


Fig. 2.13

2.7.4. Capacitatea liniei bifilare

Se consideră cazul liniei electrice bifilare, formată din două conductoare cilindrice de raze r_1 , respectiv r_2 , rectilinii, paralele, încărcate cu sarcinile lineice ρ_l și $-\rho_l$, situate la distanța d unul față de celălalt (Fig. 2.14).

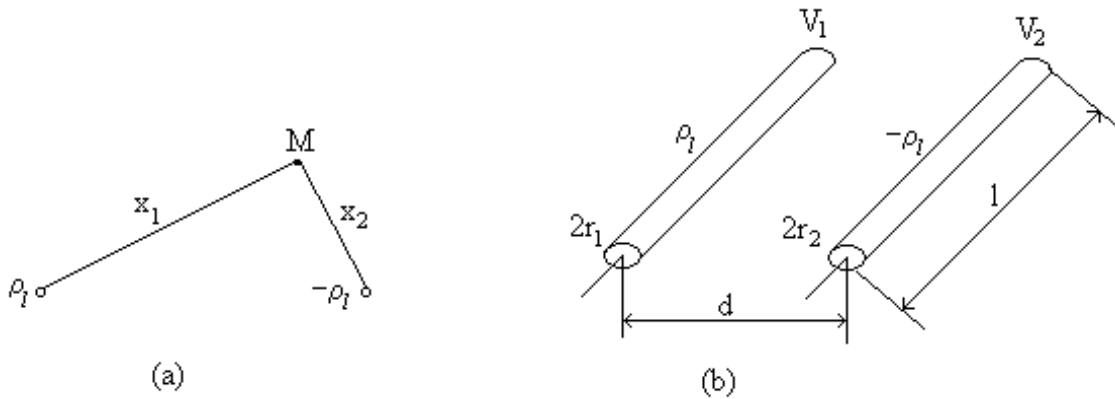


Fig. 2.14

Câmpul electric al celor două conductoare se deduce prin superpoziția câmpurilor electrice create de sarcina fiecărui conductor filiform în parte. Ținând seama de valoarea *potențialului logaritm* determinat în cadrul aplicației 4, se calculează potențialul într-un punct M din planul transversal:

$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{x_1} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{x_2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_2}{x_1}. \quad (2.28)$$

Potențialele celor două conductoare cilindrice se determină aducând succesiv punctul M pe suprafața câte unui conductor. Astfel se obțin relațiile:

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r_1}, \quad V_2 = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r_2}. \quad (2.29)$$

Calculând tensiunea între cele două conductoare ca diferența potențialelor acestora rezultă:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d^2}{r_1 r_2} = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (2.30)$$

Capacitatea lineică se calculează plecând de la relația de definiție

$$C_l = \frac{\rho_l}{U_{12}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}}. \quad (2.31)$$

Dacă cele două conductoare au secțiuni egale (cazul practic) se obține formula practică

$$C_l = \frac{1}{36 \ln \frac{d}{r}} [\mu F / km]. \quad (2.32)$$

Observație: Liniile electrice aeriene au capacități lineice de 30...50 ori mai mici decât cablurile de putere.

Influența solului.

Considerând solul ca un mediu conductor cu suprafața plană și paralelă cu conductoarele liniei, formând o suprafață echipotențială de potențial nul, se determină câmpul electric al conductoarelor prin *metoda imaginilor electrice*.

- Se consideră mai întâi cazul unui singur conductor filiform, încărcat cu sarcina lineică ρ_l , situat la distanța h de sol (Fig. 2.15). Câmpul acestui conductor, în prezența solului, este identic în domeniul de deasupra solului cu cel creat, în absența solului, de conductorul considerat și de imaginea sa în raport cu suprafața solului încărcată cu sarcina lineică $-\rho_l$.

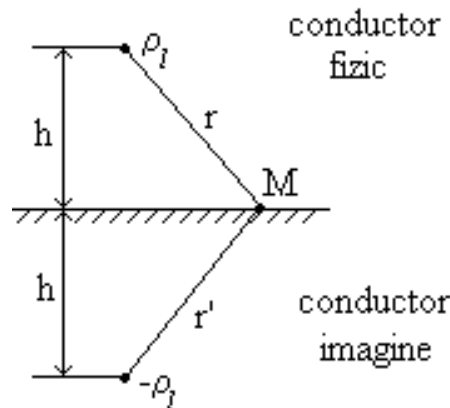


Fig. 2.15

Calculând potențialul ansamblului conductor fizic – conductor imagine într-un punct M de pe suprafața solului la distanțele $r = r'$, se obține:

$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r'} \right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r} = 0. \quad (2.33)$$

- Pentru linia bifilară (Fig. 2.16), cu cele două conductoare fizice 1 și 2, încărcate cu sarcinile ρ_l , respectiv $-\rho_l$, se obțin cele două potențiale sub forma

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_1}{r_1} + \ln \frac{d}{D} \right), \quad V_2 = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_2}{r_2} + \ln \frac{d}{D} \right). \quad (2.34)$$

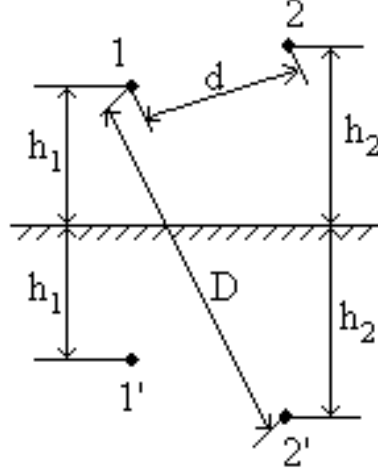


Fig. 2.16

Exprimând tensiunea dintre cele două conductoare ca diferența dintre potențialele acestora rezultă capacitatea lineică a liniei în prezența solului:

$$C_{ls} = \frac{\rho_l}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{4h_1h_2d^2}{r_1r_2D^2}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{\sqrt{r_1r_2}} \frac{2\sqrt{h_1h_2}}{D}}. \quad (2.35)$$

Comparând această relație cu relația (2.31), rezultă că influența solului este reprezentată prin factorul $\frac{2\sqrt{h_1h_2}}{D}$ din expresia logaritmată. Pentru o linie reală, care satisface relațiile $2h_1 \rightarrow 2h_2 \rightarrow D$, acest factor este unitar și capacitatea lineică se calculează cu relația (2.31).

2.8. ENERGIE ȘI FORȚE ÎN CÂMP ELECTROSTATIC

2.8.1. Energia câmpului electrostatic al unui sistem de conductoare

Energia câmpului electrostatic al unui sistem de corpuri conductoare se poate determina pe baza principiului conservării energiei, conform căruia energia elementară dW_{ext} primită din exterior de un sistem care suferă o transformare, este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar δL efectuat de sistem, căldura elementară δQ dezvoltată, creșterea elementară dW_e a energiei sistemului și energia elementară dW_t transformată în alte forme:

$$dW_{ext} = \delta L + \delta Q + dW_e + dW_t. \quad (2.36)$$

Dacă transformarea elementară se efectuează foarte lent și izoterm, pentru a avea o succesiune de stări electrostatice, fără dezvoltare sau transfer de căldură, și dacă nu se efectuează lucru mecanic, atunci:

$$dW_{ext} = dW_e. \quad (2.37)$$

În procesul de stabilire a câmpului electrostatic, lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare necesar transportării sarcinii elementare dq_k de la ∞ până pe suprafața conductorului k este:

$$\delta L_{k\text{ext}} = \int_{\infty}^{P_k} \overline{F}_{k\text{ext}} d\overline{s} = \int_{\infty}^{P_k} \left(-\overline{E} dq_k \right) d\overline{s} = \left(- \int_{\infty}^{P_k} \overline{E} d\overline{s} \right) dq_k = V_k dq_k . \quad (2.38)$$

Lucrul mecanic total necesar încărcării cu sarcini elementare a tuturor conductoarelor este:

$$\delta L_{\text{ext}} = \sum_{k=1}^n \delta L_{k\text{ext}} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k . \quad (2.39)$$

În regim electrostatic, sistemul primește energie din exterior numai sub formă de lucru mecanic al forțelor exterioare:

$$dW_{\text{ext}} = \delta L_{\text{ext}} , \quad (2.40)$$

și ținând seama de relațiile (2.37) și (2.39) rezultă:

$$dW_e = \sum_{k=1}^n V_k dq_k . \quad (2.41)$$

Considerând starea intermediară a conductoarelor caracterizată de sarcinile și potențialele $q'_k = \lambda q_k$, respectiv $V'_k = \lambda V_k$, cu $\lambda \in (0,1)$, valorile extreme corespunzând stărilor inițiale, respectiv finale, și integrând relația (2.41), se obține expresia energiei electrostatice

$$W_e = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \sum_{k=1}^n V'_k dq'_k = \left(\sum_{k=1}^n V_k q_k \right) \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k q_k . \quad (2.42)$$

În cazul particular al unui condensator

$$W_e = \frac{1}{2} (qV_1 - qV_2) = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C} . \quad (2.43)$$

2.8.2. Densitatea de volum a energiei câmpului electrostatic

Energia câmpului electrostatic este localizată în tot domeniul ocupat de câmpul electrostatic cu o densitate de volum care se poate exprima în funcție de mărimile de stare ale câmpului electric. Considerând câmpul electrostatic al unui condensator plan se obține:

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} (\overline{DnA})(\overline{End}) = \frac{1}{2} (\overline{ED})(Ad) = \frac{1}{2} \overline{EDV} . \quad (2.44)$$

Densitatea de volum a energiei electrostatice va fi

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \overline{ED} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2\varepsilon} D^2 . \quad (2.45)$$

Expresiile de mai sus sunt valabile numai în medii liniare și fără polarizație permanentă.

2.8.3. Teoremele forțelor generalizate în câmp electrostatic

Teorema lui Coulomb permite calculul forțelor care se exercită asupra corpurilor în câmp electrostatic numai pentru medii omogene, liniare și izotrope. O metodă generală de calcul a forțelor electrostatice (și a forțelor electrice în regim variabil) are la bază principiul conservării energiei (relația 2.36).

Considerând că asupra corpurilor conductoare se exercită forțe generalizate X , care determină transformări elementare dx ale corpurilor, lucrul mecanic elementar efectuat de un corp se exprimă sub forma:

$$\delta L = X dx, \quad (2.46)$$

unde forța generalizată X (acționând pe direcția de creștere a lui dx) poate fi: o forță de deplasare, un cuplu, o presiune, o tensiune superficială, iar coordonata generalizată asociată, dx , va fi, corespunzător, o distanță, un unghi, un volum sau o arie.

Dacă transformările elementare sunt efectuate în regim electrostatic, energia elementară primită de sistem de la sursele exterioare

$$dW_{ext} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k, \quad (2.47)$$

este egală, conform relației (2.36), cu suma dintre lucrul mecanic elementar efectuat de sistem și creșterea elementară a energiei electrostatice a sistemului:

$$dW_{ext} = \delta L + dW_e. \quad (2.48)$$

Calculul forței generalizate se poate face pe baza relației (2.48) în două ipoteze:

1. Sistemul este izolat. Aceasta implică:

$$q_k = ct. \Rightarrow dq_k = 0 \quad (2.49)$$

și ținând seama de (2.47) și (2.48), rezultă:

$$\delta L = -(dW_e)_{q=ct.}, \quad (2.50)$$

adică lucrul mecanic este efectuat pe baza scăderii energiei electrostatice interne a sistemului.

Exprimând energia electrostatică în funcție numai de sarcinile electrice și de coordonata generalizată, $W_e = W_e(q_1, \dots, q_n, x)$, (în cazul unui condensator cu relația $W_e = \frac{q^2}{2C(x)}$) și ținând seama de (2.49), se obține:

$$(dW_e)_{q=ct.} = \frac{\partial W_e}{\partial x} dx. \quad (2.51)$$

Relațiile (2.46), (2.50) și (2.51) conduc, pentru o transformare elementară arbitrară, la relația:

$$X = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_{q=ct.}. \quad (2.52)$$

care reprezintă prima teoremă a forțelor generalizate în câmp electrostatic, cu următorul enunț:

“Forța generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parțială cu semn schimbat a energiei electrostatice a sistemului (exprimată în funcție numai de sarcinile electrice și coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x , la sarcini constante ale conductoarelor.”

2. Sistemul are potențialele fixate (conductoarele sunt conectate la surse de tensiune), adică:

$$V_k = ct. \Rightarrow dV_k = 0. \quad (2.53)$$

În această ipoteză

$$(dW_e)_{V=ct.} = d\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k q_k\right)_{V=ct.} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k . \quad (2.54)$$

Din (2.47) și (2.54) rezultă:

$$(dW_e)_{V=ct.} = \frac{1}{2} dW_{ext} ,$$

adică, ținând seama de ecuația de bilanț (2.48),

$$\delta L = dW_{ext} - (dW_e)_{V=ct.} = (dW_e)_{V=ct.} . \quad (2.55)$$

În consecință, energia primită de sistem de la sursele exterioare se distribuie în mod egal pentru efectuarea de lucru mecanic și pentru creșterea energiei electrostatice a sistemului.

Exprimând energia electrostatică în funcție numai de potențiale și de coordonata generalizată, $W_e = W_e(V_1, \dots, V_n, x)$, (în cazul unui condensator cu relația $W_e = \frac{C(x) U^2}{2}$) și ținând seama de relația (2.53) se obține

$$(dW_e)_{V=ct.} = \frac{\partial W_e}{\partial x} dx . \quad (2.56)$$

Din (2.46), (2.55) și (2.56), pentru o transformare elementară arbitrară, rezultă a doua teoremă a forțelor generalizate în câmp electrostatic:

$$X = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_{V=ct.} , \quad (2.57)$$

cu enunțul: “Forța generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parțială a energiei electrostatice a sistemului (exprimată în funcție numai de potențialele electrice și coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x , la potențiale constante ale conductoarelor”.

Observații:

1. Pentru sistemele liniare, cele două expresii ale forței generalizate sunt echivalente.
2. Forțele electrostatice au valori mici, ceea ce face ca aplicațiile lor tehnice să se înscrie într-un domeniu limitat, la construcția unor aparate de măsură și a unor traductoare.

CAPITOLUL 3

CÂMPUL ELECTRIC STAȚIONAR (ELECTROKINETICA)

3.1. RELAȚII FUNDAMENTALE ALE ELECTROKINETICII

1. Teorema potențialului electrokinetic staționar

În regimul electrokinetic staționar al conductoarelor imobile, se constată experimental caracterul potențial (datorat repartițiilor de sarcină electrică) al câmpului electric. Astfel legea inducției electromagnetice capătă forma

$$e_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \overline{E} ds = 0, \quad (3.1)$$

numită teorema potențialului electrokinetic staționar. Ca o consecință a relației (3.1) rezultă că în regim electrokinetic staționar tensiunile electromotoare ale conductoarelor imobile pot fi datorate numai unor câmpuri electrice imprimate. Cum relația (3.1) este identică cu relația (2.2), rezultă că și în acest regim se vor constata aceleași consecințe ca în regim electrostatic:

- în fiecare punct se poate defini un potențial electric cu relația (2.3), intensitatea câmpului electric derivând din acest potențial (2.4, 2.5);
- tensiunea electrică nu depinde de drum și se poate calcula ca o diferență de potențial:

$$u_{AB} = \int_A^B \overline{E} ds = V(A) - V(B).$$

Observație: În regim electrokinetic staționar suprafețele conductoarelor NU sunt echipotențiale ca în regim electrostatic, deoarece în conductoarele parcurse de curent intensitatea câmpului electric $E \neq 0$ și conservarea componentei sale tangențiale impune înclinarea liniilor de câmp față de normală. Aceasta este o consecință a faptului că în regim electrokinetic nu mai este valabilă condiția de echilibru electrostatic $\overline{E} + \overline{E}_i = 0$, ci legea lui Ohm $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J}$.

2. Legea conservării sarcinii electrice

În regim electrokinetic staționar (regim de c.c.) sarcina electrică este constantă, iar relațiile (1.58) și (1.62) pentru conductoare imobile, devin:

$$i_{\Sigma} = 0, \text{ respectiv } \operatorname{div} \overline{J} = 0,$$

cunoscute sub numele de *teorema continuității liniilor de curent continuu*.

Interpretare: liniile de curent continuu sunt linii închise, sau curentul continuu circulă numai pe căi închise.

Consecințe:

1. Vectorul densității de curent este tangent la suprafața unui conductor străbătut de curent continuu, deci conductorul este un tub de curent;
2. Intensitatea curentului continuu este aceeași de-a lungul unui tub de curent și, în particular, de-a lungul unui conductor electric;
3. La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate se conservă componenta normală a densității de curent.

3. Legea conducției electrice și legea transformării energiei electromagnetice în procesul conducției electrice își păstrează forma.

3.2. PRIZA DE PĂMÂNT

Priza de pământ este un electrod metalic îngropat în pământ în scopul injectării sau extragerii din pământ a unui curent electric. Deoarece conductivitatea metalului este cu câteva ordine de mărime mai mare decât cea a solului (Tabelul 3.1), suprafața prizei de pământ se consideră echipotențială, iar liniile de curent în pământ sunt perpendiculare pe electrod.

Tabelul 3.1.

Rezistivitatea solului	Ωm
Sol mlăștinos	30
Sol lutos, argilos, cultivabil	100
Nisip umed	300
Sol nisipos umed	500
Nisip sau sol nisipos uscat	1000
Sol pietros	3000

Pentru simplificare se va considera cazul prizei de pământ semisferice (Fig. 3.1).

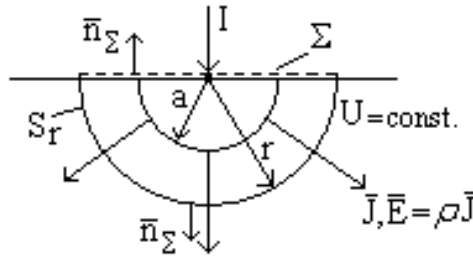


Fig. 3.1

Din motive de simetrie liniile de curent și cele de câmp electric sunt radiale și, ca funcții de punct, satisfac relațiile:

$$\vec{J} = J(r)\vec{u}_r, \text{ respectiv } \vec{E} = E(r)\vec{u}_r. \quad (3.2)$$

Ecuția corespunzătoare teoremei continuității liniilor de curent asociată cu suprafața închisă $\Sigma = \text{Semisfera} \cup \text{Discul superior}$, este $i_\Sigma = 0$, sau în formă integrală

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n}_\Sigma dA = 0. \quad (3.3)$$

Integrala poate fi descompusă pe cele două componente ale suprafeței Σ și ținând seama de relațiile (3.2) se obține:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n}_\Sigma dA = \int_{\text{Semisfera}} J(r) \vec{n}_r \cdot \vec{n}_\Sigma dA + \int_{\text{Disc}} \vec{J} \cdot \vec{n}_\Sigma dA = 0, \quad (3.4)$$

adică

$$-I + J(r)2\pi r^2 = 0. \quad (3.5)$$

Din relația (3.5) rezultă

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}, \text{ respectiv } E(r) = \rho J(r) = \frac{\rho I}{2\pi r^2}. \quad (3.6)$$

Potențialul într-un punct oarecare, luând ca referință potențialul prizei, este

$$V(r) = V(a) - \int_a^r \overline{E} dr = V(a) + \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3.7)$$

Dacă $r \rightarrow \infty \Rightarrow V(r) = 0$ și potențialul prizei capătă expresia:

$$V(a) = \frac{\rho I}{2\pi a}. \quad (3.8)$$

Relația (3.8) reprezintă tensiunea prizei de pământ față de punctele de la infinit. Atunci potențialul unui punct oarecare va fi:

$$V(r) = V(a) \frac{a}{r}, \quad (3.9)$$

adică pentru $r > a$ acesta variază hiperbolic cu distanța ca în reprezentarea din figura 3.2.

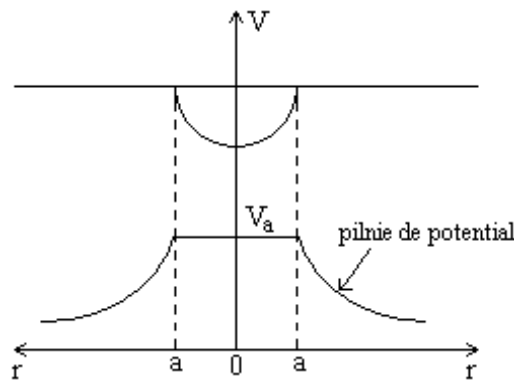


Fig. 3.2

Priza de pământ se caracterizează prin *rezistența* de dispersie definită cu relația:

$$R_p = \frac{V(a)}{I} = \frac{\rho}{2\pi a}, \quad (3.10)$$

sau prin inversul acesteia, numit conductanța prizei

$$G_p = 2\pi a \sigma. \quad (3.11)$$

Pentru protecția instalațiilor electrice, în general se prescrie pentru R_p o valoare mai mică de 4Ω .

Astfel de prize se realizează în practică cu o rețea de platbande și de țevi îngropate cât mai adânc în pământ.

O importanță specială prezintă mărimea numită *tensiune de pas*, calculată cu relația

$$U(p) = V(a+x) - V(a+x+p) = V(a) \left(\frac{a}{a+x} - \frac{a}{a+x+p} \right) = \quad (3.12)$$

$$V(a) \frac{ap}{(a+x)(a+x+p)} = \frac{\rho I p}{2\pi(a+x)(a+x+p)}$$

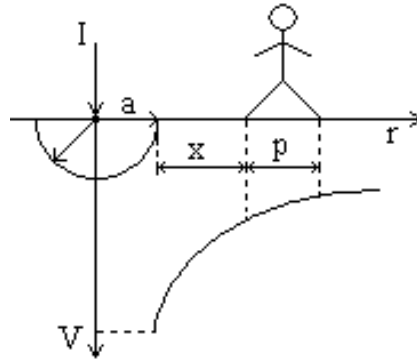


Fig. 3.3

Tensiunea de pas este maximă pentru $x = 0$, adică la marginea prizei, și are valoarea

$$U_{p\max} = V(a) \frac{p}{a + p}. \quad (3.13)$$

Pentru $p = 0$ (tălpile apropiate), $U_{p\max} = 0$.

CAPITOLUL 4

CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR. ELECTRODINAMICA.

4.1. CAUZELE APARIȚIEI CÂMPULUI MAGNETIC

Prezența câmpului magnetic este detectată experimental în preajma conductoarelor parcurse de curenți electrice sau a corpurilor magnetizate. Cauzele apariției câmpului magnetic pot fi însă mai numeroase:

- starea electrocinetică a conductoarelor prin curenții de conducție;
- corpurile magnetizate;
- corpurile elektrizate aflate în mișcare;
- variația în timp a câmpului electric.

Asupra corpurilor magnetizate, asupra conductoarelor parcurse de curenți electrice de conducție și asupra corpurilor elektrizate în mișcare, aflate în câmp magnetic, se exercită forțe și cupluri magnetice.

Câmpul magnetic asociat corpurilor cu magnetizație permanentă (magneți permanenți) se numește *câmp magnetostatic*.

Câmpul magnetic asociat curenților electrice de conducție invariabili în timp (c.c.) se numește *câmp magnetic staționar*.

Câmpul magnetic la a cărui producere contribuția datorată variației în timp a câmpului electric este neglijabilă în raport cu cea datorată curenților electrice variabili în timp se numește *câmp magnetic cvasistaționar*.

4.2. RELAȚII FUNDAMENTALE ALE CÂMPULUI MAGNETIC STAȚIONAR

1. *Legea fluxului magnetic* are formele prezentate în cadrul paragrafului 1.6.2.

Ecuția reprezentând forma locală a legii pentru domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale $\text{div} \vec{B} = 0$, este identic satisfăcută dacă se exprimă $\vec{B}$ sub forma

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (4.1)$$

deoarece $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$. $\vec{A}$ este un câmp de vectori, numit **potențial magnetic vector** al câmpului magnetic. El nu are o semnificație fizică nemijlocită; folosirea sa permite

simplificarea tratării matematice a unor probleme fizice. Astfel, ținând seama de relația 4.1, și aplicând teorema lui Stokes, fluxul magnetic poate fi exprimat cu relația:

$$\Phi_{S_\Sigma} = \int_{S_\Sigma} \overline{Bn}_{S_\Sigma} dA = \int_{S_\Sigma} \overline{rot A n}_{S_\Sigma} dA = \int_{\Gamma} \overline{A} ds. \quad (4.2)$$

Avantajul acestei exprimări constă în aceea că, în timp ce pentru efectuarea integralei pe suprafață este necesar să se determine valorile inducției magnetice în toate punctele suprafeței, pentru efectuarea integralei pe contur este suficient să se determine valorile potențialului magnetic în punctele conturului, efortul de calcul fiind evident mult mai mic.

Relația (4.2) pune în evidență faptul că valoarea fluxului magnetic nu depinde de forma suprafeței S_Γ prin care se calculează, ci numai de conturul Γ pe care se sprijină aceasta. Această constatare poate fi demonstrată astfel: fie două suprafețe S_{Γ_1} și S_{Γ_2} ce se sprijină pe curba Γ . Se consideră suprafața $\Sigma = S_{\Gamma_1} \cup S_{\Gamma_2}$ și se aplică legea fluxului magnetic:

$$\Phi_\Sigma = \int_{\Sigma} \overline{Bn}_\Sigma dA = \int_{S_{\Gamma_1}} \overline{Bn}_\Sigma dA + \int_{S_{\Gamma_2}} \overline{Bn}_\Sigma dA = - \int_{S_{\Gamma_1}} \overline{Bn}_{S_{\Gamma_1}} dA + \int_{S_{\Gamma_2}} \overline{Bn}_{S_{\Gamma_2}} dA = -\Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

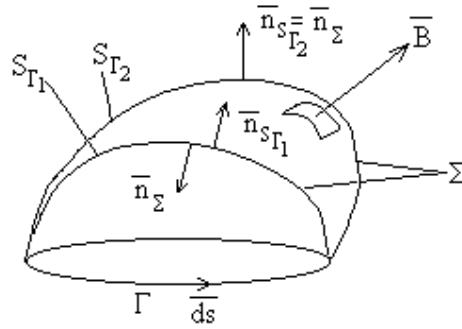


Fig. 4.1

Rezultă că oricare ar fi S_{Γ_1} și S_{Γ_2} fluxul magnetic se conservă:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \quad (4.3)$$

2. Legea circuitului magnetic în regim staționar capătă forma particulară

$$U_{mm\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma}, \quad (4.4)$$

respectiv

$$\int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{S_\Gamma} \overline{Jn}_{S_\Gamma} dA, \quad (4.5)$$

numită teorema lui Ampère în formă integrală. Forma locală a teoremei este

$$\overline{rot H} = \overline{J}. \quad (4.6)$$

Observație:

În timp ce câmpul electrostatic este irotațional ($\overline{rot E} = 0$) și are circulație nulă pe orice contur închis ($\int_{\Gamma} \overline{E} ds = 0$), câmpul magnetic staționar este irotațional numai în domeniile fără curent de conducție și are circulație nulă numai pentru curbele neînlănțuite de curenți.

3. Legea legăturii în câmp magnetic și *legea magnetizației temporare* au formele prezentate în paragrafele 1.6.10 și 1.6.11.

4.3. TUB DE FLUX MAGNETIC

Un ansamblu de linii ale inducției magnetice care se sprijină pe o curbă închisă constituie un *tub de flux magnetic* (Fig. 4.2).

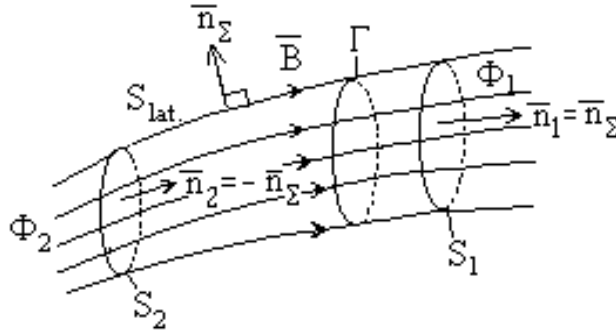


Fig. 4.2

Aplicând legea fluxului magnetic pe o suprafață închisă $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$, pe baza aceluiași considerente de la tubul de flux electric, se obține relația de conservare a fluxului magnetic

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dA = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dA + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dA = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dA - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dA = \Phi_1 - \Phi_2 = 0,$$

adică

$$\Phi_1 = \Phi_2. \quad (4.7)$$

4.4. TEOREMA REFRAȚIEI LINIILOR DE CÂMP MAGNETIC

La trecerea liniilor de câmp magnetic printr-o suprafață de separație între două medii cu permeabilități diferite (Fig. 4.3) are loc refracția acestora după relația

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (4.8)$$

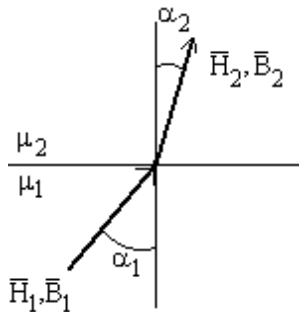


Fig. 4.3

care a fost prelucrată ținând seama de forma locală a legii fluxului magnetic și de forma locală a legii circuitului magnetic.

Din relația (4.8) rezultă că la suprafața de separație dintre un corp feromagnetic ($\mu_1 \rightarrow \infty$) și unul neferomagnetic ($\mu_2 \rightarrow \mu_0$), liniile de câmp magnetic ies perpendicular pe suprafața corpului feromagnetic.

4.5. APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI AMPÈRE

Aplicația 1. *Calculul intensității câmpului magnetic produs de un conductor cilindric circular de rază a , rectiliniu, infinit, parcurs de curentul i , uniform distribuit pe secțiunea sa (Fig. 4.4).*

Din motive de simetrie, liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice cu centrul în axa conductorului. Vectorul intensității câmpului magnetic este tangent în orice punct la linia de câmp, iar sensul lui este asociat cu sensul curentului electric prin regula burghiului drept, ca în figura 4.4. Aplicând teorema lui Ampère de-a lungul unei linii de câmp Γ și calculând solenația în cele două domenii (interior și exterior suprafeței transversale a conductorului), se obține succesiv:

$$U_{mm\Gamma}(r) = \int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{\Gamma} H ds = H \int_{\Gamma} ds = H \cdot 2\pi r,$$

oricare ar fi r în raport cu a .

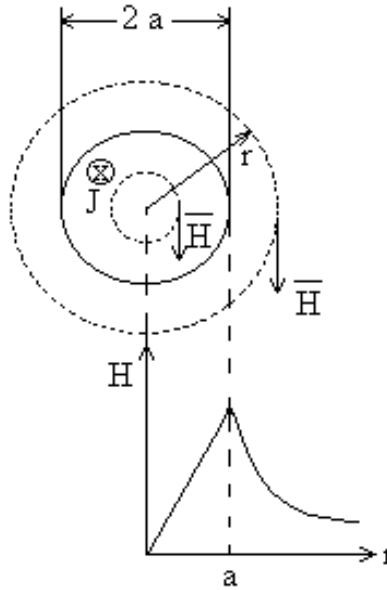


Fig. 4.4

Solenația se calculează în cele două domenii:

$$r < a, \quad \Theta(r) = J\pi r^2 = \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2 = i \frac{r^2}{a^2},$$

$$r \geq a, \quad \Theta(r) = i$$

Egalând termenii din relația (4.4) se obține:

$$r < a, \quad H^i(r) = \frac{ir}{2\pi a^2},$$

$$r \geq a, \quad H^e(r) = \frac{i}{2\pi r}.$$

Variația lui $H(r)$ este prezentată în Fig.4.4.

Aplicația 2. Să se determine câmpul magnetic produs de un tor omogen și izotrop, bobinat uniform cu N spire, parcurse de curentul i (Fig. 4.5).

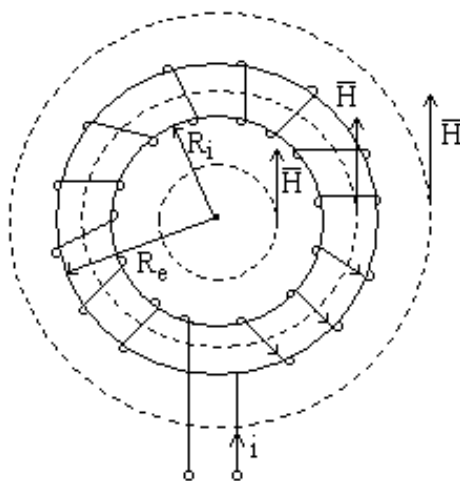


Fig. 4.5

Din motive de simetrie liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice situate în plane perpendiculare pe axa torului.

Calculând tensiunea magnetică și solenația în cele trei domenii se obține:

$$U_{mm\Gamma}(r) = \int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_{\Gamma} H ds = H \int_{\Gamma} ds = H \cdot 2\pi r.$$

$$\Theta_{S\Gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } r < R_i \\ Ni & \text{pentru } R_i < r < R_e \\ 0 & \text{pentru } r > R_e \end{cases}$$

Egalând cele două expresii rezultă intensitatea câmpului magnetic în cele trei domenii:

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } r < R_i \\ \frac{Ni}{2\pi r} & \text{pentru } R_i < r < R_e \\ 0 & \text{pentru } r > R_e \end{cases}$$

Notând cu $l = 2\pi r$ lungimea liniei de câmp, intensitatea în interiorul torului se poate exprima ca

$$H = \frac{Ni}{l},$$

relație valabilă și pentru un solenoid infinit lung, și ce va fi folosită la calculul inductivității proprii a unui tor sau bobine și la exprimarea densității de energie magnetică.

Observații:

1. Un tor cu raza tinzând la infinit este echivalent cu un solenoid drept infinit lung;
2. Un tor sau un solenoid infinit lung, omogen și izotrop nu produce câmp magnetic decât în interiorul bobinei sale.

Aplicația 3. Să se calculeze câmpul magnetic în creștătura dreptunghiulară a unei mașini electrice (Fig. 4.6).

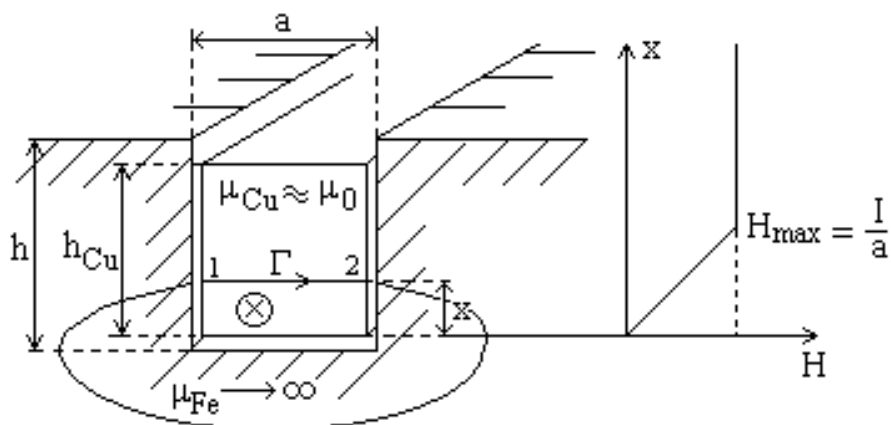


Fig. 4.6

Ipoteze:

1. Curentul este uniform repartizat în bară.
2. Armătura din material feromagnetic în creștătura căreia este introdusă bara conductoare de cupru are o permeabilitate foarte mare, astfel încât se poate considera $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$. Cupru fiind un material neferomagnetic se poate considera $\mu_{Cu} \approx \mu_0$.

3. Conform teoremei refracției liniilor de câmp magnetic, în creștătură (la suprafața de separație între cele două materiale) liniile de câmp sunt perpendiculare pe pereții laterali ai creștăturii.

4. În materialul feromagnetic liniile de câmp îmbrățișează bara parcursă de curent.

Conform formei locale la suprafețe de discontinuitate a legii fluxului magnetic, la suprafața creștăturii se conservă componenta normală a inducției magnetice: $B_{Fe} = B_{Cu}$, adică $\mu_{Fe} H_{Fe} = \mu_{Cu} H_{Cu}$, de unde rezultă că intensitatea câmpului magnetic în armătură $H_{Fe} = \frac{\mu_0 H_0}{\mu_{Fe}} \rightarrow 0$, deci tensiunea magnetică în materialul feromagnetic $u_{mFe} \rightarrow 0$.

În consecință integrala pe linia de câmp este diferită de zero numai în creștătură și

$$\int_{\Gamma} \overline{H} ds = \int_1^2 H_{Cu} ds = H_{Cu} \cdot a.$$

Solenația corespunzătoare se calculează cu relația

$$\Theta_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J n_{S_{\Gamma}}} dA = J \cdot ax = \frac{I}{ah_{Cu}} ax = I \frac{x}{h_{Cu}}.$$

Aplicând relația (4.4) se obține $H_{Cu} = I \frac{x}{ah_{Cu}}$.

Observații:

1. Deasupra barei ($x > h_{Cu}$), $\Theta_{S_{\Gamma}} = I = ct.$ și $H_0 = \frac{I}{a} = ct.$
2. Sub bară ($x < 0$) câmpul este nul.

4.6. CIRCUITE MAGNETICE

4.6.1. Considerații generale

Conform teoremei refracției, liniile de câmp magnetic sunt practic tangențiale pe fețele interioare ale suprafeței corpurilor feromagnetice cu $\mu \gg \mu_0$ și la suprafețele de separație (de discontinuitate) se conservă componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $H_{2t} = H_{1t}$. În interiorul corpurilor feromagnetice componenta tangențială a inducției magnetice satisface relația

$$B_{1t} = \mu_1 H_{1t} \gg B_{2t} = \mu_0 H_{2t}. \quad (4.9)$$

Prin urmare liniile inducției magnetice sunt conduse prin corpurile feromagnetice aproximativ precum liniile densității curentului electric de conducție prin conductoare.

Deoarece liniile de inducție magnetică sunt închise ($\text{div} \vec{B} = 0$), se numește *circuit magnetic* ansamblul corpurilor feromagnetice (sau ferimagnetice) și a porțiunilor care le separată, numite întrefieruri și umplute cu material neferomagnetic, prin care trec aceste linii.

În conformitate cu relația (4.9), rezultă că pentru obținerea unor inducții magnetice, respectiv fluxuri magnetice mari, la valori date ale câmpului magnetic, este necesar ca înfășurările bobinelor să se dispună pe porțiuni din material feromagnetic.

Un circuit magnetic este compus din porțiuni numite coloane (sau miez), pe care se dispun bobinele, din porțiuni fără înfășurări prin care se închid liniile de câmp, numite juguri (cele din material feromagnetic) și întrefieruri, și eventual din porțiuni mobile, numite armături.

Pe părțile laterale ale întrefierurilor apar polii magnetici. Convențional se numește pol nord (N) porțiunea de material feromagnetic din care ies liniile de câmp magnetic și pol sud (S), cea în care intră liniile de câmp magnetic.

Cea mai mare parte a liniilor inducției magnetice se închid prin circuitul magnetic determinând câmpul magnetic util (principal). Restul liniilor de câmp, care se închid parțial prin circuitul magnetic, parțial prin mediul neferomagnetic (de obicei aer) înconjurător formează liniile câmpului magnetic de dispersie (sau scăpări).

Rezolvarea circuitelor magnetice constă în:

1. Determinarea fluxurilor utile și a celor de dispersie la o distribuție dată a solenațiilor;
2. Determinarea solenațiilor de excitație necesare producerii unui flux util cerut.

Rezolvarea se poate face

1. Direct – aplicând legea fluxului magnetic și teorema lui Ampère;
2. Utilizând analogia dintre circuitele electrice și cele magnetice.

Calculul circuitelor magnetice se face numai în regim staționar și cvasistaționar și în următoarele *ipoteze simplificatoare*:

- a) Se neglijează fenomenul dispersiei magnetice;
- b) Se consideră fluxul magnetic uniform repartizat pe secțiunea transversală a circuitului magnetic, astfel încât inducția magnetică să fie constantă în toate punctele secțiunii, iar:

$$\Phi_f = B \cdot A, \quad (4.10)$$

unde Φ_f este fluxul magnetic fascicular definit ca fluxul magnetic calculat prin secțiunea unei laturi a circuitului magnetic (analog curentului electric de inducție în electrocinetică).

4.6.2. Legea lui OHM pentru circuite magnetice

Se consideră o porțiune neramificată de circuit magnetic (Fig. 4.7) care formează un tub de flux (are același flux în orice secțiune transversală). Conform ipotezei simplificatoare b):

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi_f}{\mu \cdot A}. \quad (4.11)$$

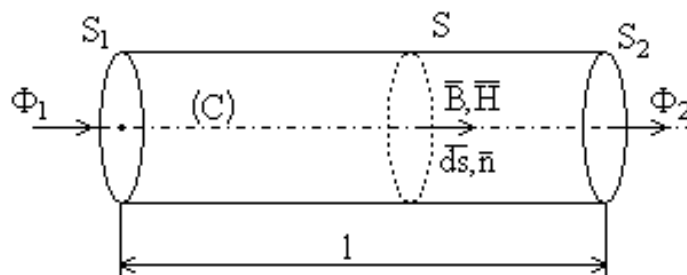


Fig. 4.7

Calculând tensiunea magnetică de-a lungul liniei medii de câmp (C) între două secțiuni transversale obținem:

$$U_m = \int_{l(C)}^2 \overline{H} ds = \int_{l(C)}^2 H ds = \int_{l(C)}^2 \frac{\Phi_f}{\mu A} ds = \Phi_f \int_{l(C)}^2 \frac{ds}{\mu A}, \quad (4.12)$$

unde integrala din relație, notată cu R_m , se numește *reluctanță*. Pentru o porțiune omogenă de circuit magnetic ($\mu = \text{ct.}$) cu secțiune constantă,

$$R_m = \frac{l}{\mu A}. \quad (4.13)$$

Relația

$$U_m = \Phi_f R_m, \quad (4.14)$$

reprezintă legea lui Ohm pentru circuite magnetice.

Unitatea de măsură a reluctanței este $[A/Wb]$ sau $[H^{-1}]$. Inversul reluctanței se numește *permeanță*, are simbolul Λ și unitatea de măsură $[Wb/A]$ sau $[H]$.

Rezultă următoarea analogie între circuitele electrice și cele magnetice:

Tabel 4.1

Circuite electrice		Circuite magnetice	
Densitatea curentului	J	Inducția magnetică	B
Intensitatea câmpului electric	E	Intensitatea câmpului magnetic	H
Intensitatea curentului de conducție	I	Fluxul magnetic fascicular	Φ_f
Tensiunea electrică	U	Tensiunea magnetică	U_m
Rezistența electrică	R	Reluctanța	R_m
Conductanța	G	Permeanța	Λ
Tensiunea electromotoare	$e(E)$	Solenația	Θ

4.6.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Prima teoremă: Se consideră nodul (i) al unui circuit magnetic și o suprafață Σ care intersectează laturile circuitului în secțiunile $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$. Se aplică *legea fluxului magnetic* pe suprafața Σ ținând seama de ipoteza privind neglijarea dispersiei. În consecință, cum inducția magnetică este nenulă numai prin secțiunile (S_k) ale circuitului magnetic, rezultă:

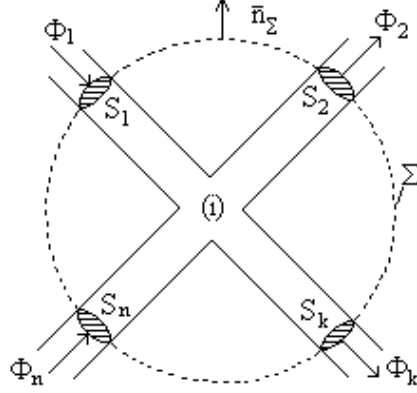


Fig. 4.8

$$\Phi_{\Sigma} = \sum_{l_k \in (i)} {}^{(A)}\Phi_{fk} = 0. \quad (4.15)$$

Relația (4.15) reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice: "Suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare din laturile incidente la un nod al unui circuit magnetic este nulă". Relația poate fi scrisă în $n-1$ noduri ale circuitului magnetic.

Semnul pozitiv în suma algebrică se ia când sensul fluxurilor fasciculare coincide cu sensul normalei $\vec{n}_{\Sigma}$.

Teorema a doua: Se consideră o buclă de circuit magnetic (h) în care curba Γ (Fig. 4.9) reprezintă linia medie de câmp. Descompunând această curbă și aplicând *teorema lui Ampère* se obține:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = \sum_{l_k \in (h)} \int_{C_k} \vec{H} d\vec{s} = \sum_{l_k \in (h)} {}^{(A)}U_{mk} = \Theta_{S_k}. \quad (4.16)$$

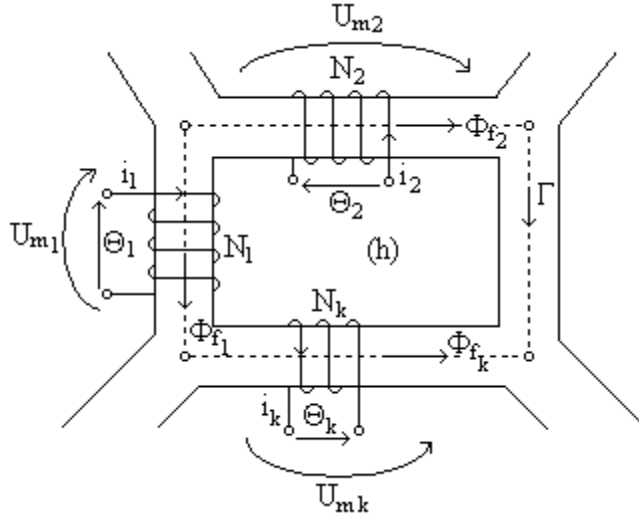


Fig. 4.9

Solenanția totală ce străbate suprafața S_{Γ} este suma solenațiilor bobinelor de pe laturile circuitului, în consecință:

$$\sum_{l_k \in (h)} {}^{(A)}U_{mk} = \sum_{l_k \in (h)} {}^{(A)}N_k i_k. \quad (4.17)$$

Relația (4.17) reprezintă a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice cu enunțul: “Suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică de pe laturile circuitului ce alcătuiesc o buclă este egală cu suma algebrică a solenațiilor bobinelor dispuse pe aceste laturi”. Ținând seama de (4.14), relația (4.17) devine:

$$\sum_{l_k \in (h)} {}^{(A)}R_{mk} \Phi_{fk} = \sum_{l_k \in (h)} {}^{(A)}N_k i_k . \quad (4.18)$$

Θ_k este asociată cu i_k după regula burghiului drept;
 U_{mk} are același sens de referință cu Φ_{fk} (ce are sens arbitrar).

4.7. INDUCTIVITĂȚI

4.7.1. Inductivități proprii și mutuale

Se consideră un circuit filiform 1, care ocupă conturul Γ_1 , și fiind parcurs de curentul de conducție i_1 , produce un câmp magnetic de inducție $\vec{B}_1$ ale cărui linii de câmp sunt reprezentate în figura 4.10.

Se numește flux magnetic propriu al circuitului 1 fluxul magnetic al câmpului de inducție $\vec{B}_1$ printr-o suprafață S_{Γ_1} :

$$\Phi_{11} = \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dA . \quad (4.19)$$

Versorul normalei $\vec{n}_1$ este asociat sensului de parcurgere al conturului Γ_1 (care coincide cu sensul curentului i_1) după regula burghiului drept.

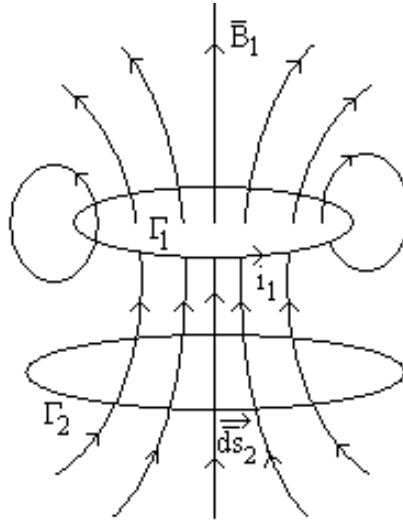


Fig. 4.10

Se numește inductivitate proprie raportul strict pozitiv:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} > 0 . \quad (4.20)$$

Dacă în vecinătatea circuitului 1, numit circuit excitator, se află un alt circuit 2 neparcurs de curent, numit circuit indus, ocupând conturul Γ_2 , câmpul magnetic $\overline{B_1}$ determină prin acesta un flux magnetic mutual Φ_{21} :

$$\Phi_{21} = \int_{S_{\Gamma_2}} \overline{B_1} n_2 dA. \quad (4.21)$$

Versorul normalei $\overline{n_2}$ este asociat sensului de parcurgere al conturului Γ_2 după regula burghiului drept. Se numește inductivitate mutuală, raportul:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}. \quad (4.22)$$

Semnul inductivității mutuale este dat de modul în care se corelează sensul de referință al lui i_1 cu sensul de parcurgere al lui Γ_2 .

Fluxurile în raport cu care se definesc inductivitățile proprii și mutuale sunt fluxuri totale. Dacă circuitele 1 și 2 sunt alcătuite din bobine cu N_1 , respectiv N_2 spire, care ocupă poziții apropiate, se calculează fluxurile totale cu ajutorul fluxului magnetic fascicular al unei spire medii, astfel încât relațiile (4.20) și (4.22) devin:

$$L_{11} = N_1 \frac{\Phi_{f11}}{i_1} > 0, \quad (4.23)$$

respectiv

$$L_{21} = N_2 \frac{\Phi_{f21}}{i_1}. \quad (4.24)$$

Reluând raționamentul pentru $i_2 \neq 0$ și $i_1 = 0$ se pot defini inductivitatea proprie a circuitului 2 și inductivitatea mutuală L_{12} .

$$L_{22} = N_2 \frac{\Phi_{f22}}{i_2} > 0 \quad (4.25)$$

și

$$L_{12} = N_1 \frac{\Phi_{f12}}{i_2}. \quad (4.26)$$

Inductivitățile mutuale satisfac relația

$$L_{12} = L_{21}. \quad (4.27)$$

Dacă se negligează dispersia

$$L_{12}^2 = L_{11}L_{22}. \quad (4.28)$$

În tehnică se definește un factor de cuplaj

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \quad (4.29)$$

$k = 0 \rightarrow L_{12} = 0 \rightarrow$ bobinele sunt necuplate magnetic;

$k = 1 \rightarrow L_{12}^2 = L_{11}L_{22} \rightarrow$ cuplajul magnetic este perfect.

Unitatea de măsură a inductivității este *Henry* [H], $1\text{H} = 1\text{Wb}/1\text{A}$.

Se poate calcula fluxul magnetic al unui circuit j , corespunzător unui sens de parcurgere dat, prin însumarea fluxului magnetic propriu, $\Phi_{jj} = L_{jj}i_j$, cu fluxurile magnetice mutuale, $\Phi_{jk} = L_{jk}i_k$:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^n \pm L_{jk}i_k, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (4.30)$$

Relațiile (4.30) se numesc *relațiile lui Maxwell pentru inductivități*. La efectuarea sumei trebuie să se țină seama de relația dintre sensul de parcurgere ales și sensurile pentru care au fost definite fluxurile.

Aplicație. Calculul inductivității proprii a unei înfășurări cu N spire, bobinate uniform pe o porțiune de circuit magnetic omogen. Ținând seama că inductivitatea proprie se definește în funcție de fluxul magnetic total și aplicând legea lui Ohm pentru circuite magnetice, se obține o expresie a inductivității proprii a unei bobine în funcție de numărul de spire și caracteristicile geometrice și de material ale circuitului magnetic pe care este dispusă:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{N^2\Phi_f}{Ni} = \frac{N^2}{R_m}. \quad (4.31)$$

Relația mai poate fi dedusă cu ajutorul intensității câmpului magnetic al unui solenoid foarte lung:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu HA}{i} = \frac{N\mu \frac{Ni}{l} A}{i} = N^2 \frac{\mu A}{l} = \frac{N^2}{R_m}. \quad (4.32)$$

4.7.2. Inductivități de dispersie și utile

Se fac următoarele notații în concordanță cu figura 4.10:

Φ_{f11} – reprezintă fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce trece printr-o spiră a circuitului 1;
 Φ_{f21} – reprezintă fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce trece printr-o spiră a circuitului 2, numit flux util;
 Φ_{fd21} – este fluxul de dispersie al circuitului 1 față de circuitul 2, adică fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce nu trece prin circuitul 2, numit flux de scăpări.

Între aceste fluxuri există următoarele relația:

$$\Phi_{f11} = |\Phi_{f21}| + \Phi_{fd21}, \quad (4.33)$$

de unde rezultă

$$\Phi_{fd21} = \Phi_{f11} - |\Phi_{f21}|. \quad (4.34)$$

Se numește inductivitate de dispersie a circuitului 1 față de circuitul 2

$$L_{d21} = N_1 \frac{\Phi_{fd21}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{f11}}{i_1} - N_1 \frac{|\Phi_{f21}|}{i_1}. \quad (4.35)$$

Ținând seama de relațiile (4.22) și (4.23) se obține

$$L_{d21} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| > 0. \quad (4.36)$$

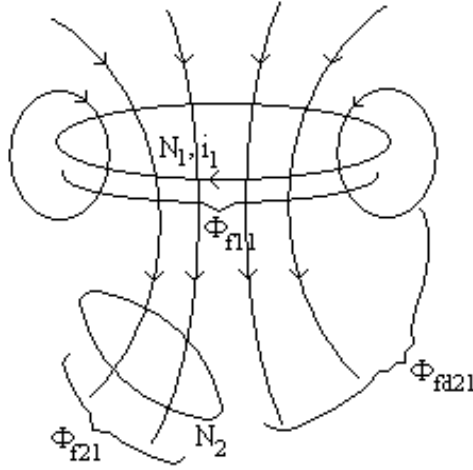


Fig. 4.11

Analog se obține

$$L_{d12} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1} |L_{12}| > 0. \quad (4.37)$$

În general

$$L_{d12} \neq L_{d21}. \quad (4.38)$$

Inductivitățile proprii se pot exprima sub forma

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{d21} + L_{u21} \\ L_{22} &= L_{d12} + L_{u12} \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.8. INDUCTIVITATEA LINIEI ELECTRICE AERIENE BIFILARE

Se consideră o linie electrică aeriană bifilară, având conductoarele cilindrice paralele, de diametre egale, de lungime foarte mare în comparație cu distanța dintre axele lor, parcurse în sensuri opuse de curentul i . Câmpul magnetic al liniei poate fi determinat prin superpoziția câmpurilor produse de fiecare conductor. Folosind expresia câmpului magnetic produs în exteriorul său de un conductor rectiliniu parcurs de curentul i (Aplicația 1 din paragraful 4.5) se obține fluxul magnetic prin suprafața S_Γ (Fig. 4.12) determinat de unul din conductoare:

$$\Phi^e = \int_{S_\Gamma} \vec{B}^e \cdot \vec{n} dA = \mu_0 \int_a^{D-a} H^e l dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_a^{D-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{D}{a}. \quad (4.40)$$

Aplicând regula burghiului drept se constată că vectorii intensităților câmpurilor magnetice produse de cele două conductoare au același sens, prin urmare fluxul magnetic exterior total va fi:

$$\Phi_t^e = 2\Phi^e = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \ln \frac{D}{a}. \quad (4.41)$$

Inductivitatea externă se determină cu relația:

$$L^e = \frac{\Phi_t^e}{i} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{a}. \quad (4.42)$$

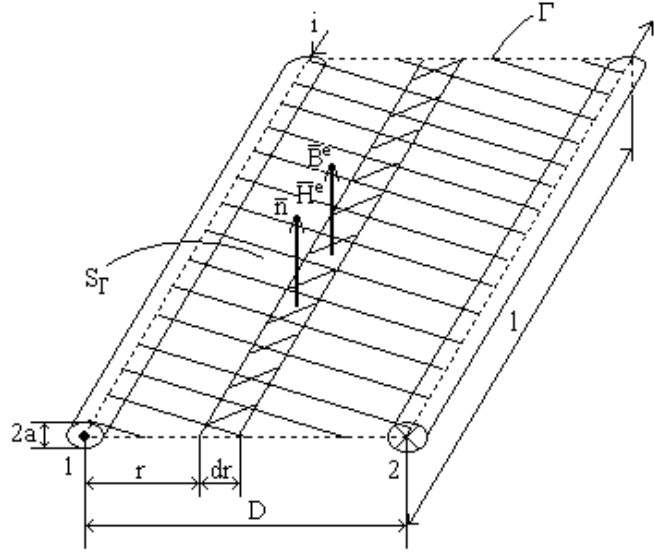


Fig. 4.12

Inductivitatea datorată câmpului magnetic din interiorul conductoarelor se calculează cu ajutorul energiei magnetice (vezi paragraful 4.9.1):

$$L^i = \frac{\mu l}{4\pi} = \mu_r \frac{\mu_0 l}{4\pi}. \quad (4.43)$$

Inductivitatea totală, ce corespunde câmpului magnetic total este:

$$L_t = L^e + L^i = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{D}{a} \right]. \quad (4.44)$$

Se definește inductivitatea lineică

$$L_l = \frac{L_t}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{D}{a} \right] = \left[\mu_r + 4 \ln \frac{D}{a} \right] \cdot 10^{-4} \quad [\text{H/km}]. \quad (4.45)$$

Inductivitatea mutuală dintre două linii bifilare paralele se calculează tot pe baza superpoziției câmpurilor magnetice: fluxul magnetic mutual al liniei 11' prin circuitul liniei 22' pe o lungime axială l , este egal cu suma fluxurilor mutuale produse de câte un conductor 1 sau 1', cele două fluxuri fiind, conform regulii burghiului drept, de sensuri opuse (Fig. 4.13).

Fluxul magnetic mutual datorat conductorului 1, parcurs de curentul i este

$$\Phi_1 = \int_{r_{12}}^{r_{12'}} B^e l dr = \int_{r_{12}}^{r_{12'}} \mu_0 H^e l dr = \int_{r_{12}}^{r_{12'}} \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{r_{12'}}{r_{12}}. \quad (4.46)$$

Pentru conductorul 1' parcurs de același curent i , dar în sens invers, obținem:

$$\Phi_{1'} = - \int_{r_{12}}^{r_{12'}} B^e l dr = - \int_{r_{12}}^{r_{12'}} \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l dr = - \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{r_{12'}}{r_{12}}. \quad (4.47)$$

Inductivitatea mutuală este deci:

$$L_{12} = \frac{\Phi_1 + \Phi_{1'}}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{12'} r_{1'2}}{r_{12} r_{1'2'}. \quad (4.48)$$

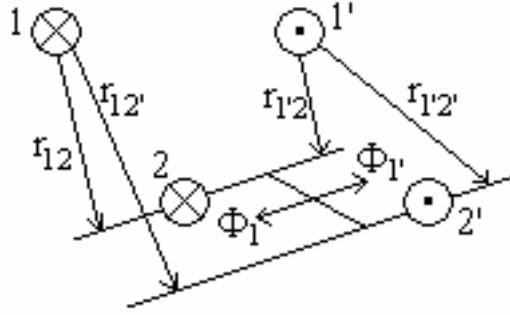


Fig. 4.13

Inductivitatea mutuală lineică este

$$L_{12l} = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{r_{12}' r_{1'2}}{r_{12} r_{1'2'}} \quad [\text{H/km}]. \quad (4.49)$$

4.9. ENERGIA ȘI FORȚELE CÂMPULUI MAGNETIC

4.9.1. Energia câmpului magnetic

Se consideră un sistem de n circuite electrice filiforme, caracterizate de rezistențele electrice, tensiunile la borne, curenții și fluxurile magnetice R_k, u_k, i_k, Φ_k (Fig. 4.14)

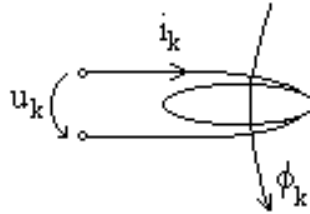


Fig.4.14

Energia magnetică a sistemului poate fi calculată pe baza principiului conservării energiei, conform căruia energia primită de la surse trebuie să acopere pierderile prin efect Joule în rezistențele circuitelor, lucrul mecanic al forțelor generalizate și creșterea energiei magnetice a sistemului:

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + \delta L + dW_m. \quad (4.50)$$

Dacă se aplică legea conducției electrice, pentru circuitul k se obține:

$$u_{fk} + e_{ik} = R_k i_k, \quad (4.51)$$

unde u_{fk} este tensiunea electrică în lungul firului, iar e_{ik} reprezintă t.e.m. a circuitului, considerată nulă. Legea inducției electromagnetice, aplicată conturului închis format din conductorul circuitului k și linia tensiunii la borne, are forma:

$$e_{\Gamma} = u_{fk} - u_k = - \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (4.52)$$

Considerând fluxurile magnetice variabile în timp, din ultimele două ecuații se obține:

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (4.53)$$

Înmulțind relația (4.53) cu $i_k dt$ și sumând pentru toate circuitele, rezultă relația:

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k . \quad (4.54)$$

Comparând relațiile (4.50) și (4.54) se obține:

$$\delta L + dW_m = \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k . \quad (4.55)$$

Considerând că în sistem au loc transformări în care nu se efectuează lucru mecanic (circuitele sunt imobile), iar într-o stare intermediară curenții și fluxurile magnetice satisfac relațiile $i'_k = \lambda i_k$, respectiv $\Phi'_k = \lambda \Phi_k$, cu $\lambda \in [0,1]$, prin integrarea relației (4.55) se obține:

$$W_m = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \sum_{k=1}^n i'_k d\Phi'_k = \left(\sum_{k=1}^n \Phi_k i_k \right) \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k i_k . \quad (4.56)$$

În particular, pentru o bobină, $n=1$, $\Phi = Li$ și

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{\Phi^2}{2L} , \quad (4.57)$$

iar pentru două bobine cuplate magnetic

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 . \quad (4.58)$$

Primul termen reprezintă energia magnetică proprie a bobinei 1, al doilea - energia magnetică proprie a bobinei 2, iar al treilea – energia magnetică de interacțiune a bobinelor.

În general, pentru un circuit oarecare parcurs de curentul i , situat într-un câmp magnetic exterior, energia de interacțiune este:

$$W_{\text{int}} = i\Phi_{\text{ext}} . \quad (4.59)$$

4.9.2. Densitatea de volum a energiei câmpului magnetic

Energia câmpului magnetic este localizată în tot domeniul ocupat de câmp cu o densitate de volum care se poate exprima în funcție de mărimile de stare ale câmpului magnetic.

Exprimând energia magnetică a unui solenoid foarte lung, înfășurat uniform într-un mediu omogen cu relația

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} N\Phi_f i = \frac{1}{2} NBA \frac{HI}{N} = \frac{1}{2} (\overline{HB})(Al) = \frac{1}{2} \overline{HB}V , \quad (4.60)$$

densitatea de volum a energiei câmpului magnetic poate fi exprimată prin una din expresiile:

$$w_m = \frac{1}{2} \overline{HB} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 , \quad (4.61)$$

valabile numai în medii liniare.

Observație:

Pentru a se compara densitatea de volum a energiei electrice cu cea a energiei magnetice, pentru valori practice ale mărimilor de stare, se determină:

- Densitatea de volum a energiei electrice în cazul unui câmp electric în aer, cu o intensitate a câmpului de 10 kV/cm (la 21 kV/cm se străpunge aerul):

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{10^8}{10^{-4}} \approx 4,42 \text{ J/m}^3;$$

- Densitatea de volum a energiei magnetice pentru un câmp magnetic în aer, cu inducția de 1 T (inducții magnetice de 3T se realizează în mod curent):

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi 10^{-7}} = \frac{10^7}{8\pi} \approx 400.000 \text{ J/m}^3.$$

Se observă că densitatea de volum a energiei magnetice este de aproximativ 90.000 de ori mai mare decât a celei electrice, ceea ce justifică importanța aplicațiilor tehnice și domeniile largi de utilizare a dispozitivelor magnetice.

Aplicație: Calculul energiei câmpului magnetic din interiorul unui conductor cilindric drept de lungime l foarte mare și rază $a \ll l$, parcurs de curentul i (Fig. 4.15).

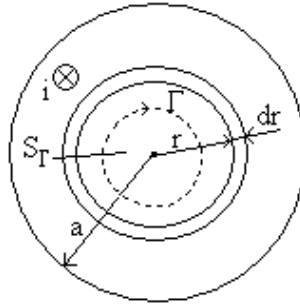


Fig. 4.15

Considerând un volum elementar de forma unei coji cilindrice și intensitatea câmpului magnetic din interiorul conductorului (determinată în cadrul aplicației 1 din paragraful 4.5) energia elementară în interiorul conductorului se exprimă cu relația:

$$dW_m^i = w_m \cdot dv = \frac{1}{2} \mu (H^i)^2 \cdot 2\pi r l dr = i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4} r^3 dr.$$

Energia magnetică totală localizată în interiorul conductorului este:

$$W_m^i = i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = i^2 \frac{\mu l}{16\pi}.$$

Inductivitatea corespunzătoare câmpului magnetic din interiorul conductorului masiv este:

$$L^i = \frac{2W_m^i}{i^2} = \frac{\mu l}{8\pi}.$$

Pentru o linie cu 2 conductoare paralele, identice, situate la distanță mult mai mare decât raza lor, inductivitatea interioară este dublă:

$$L^i = \frac{\mu l}{4\pi}.$$

4.9.3. Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Lucrul mecanic elementar care se efectuează la o deplasare elementară dx a unuia din circuitele sistemului, în câmp magnetic, se poate determina din relația (4.55):

$$\delta L = \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k - dW_m. \quad (4.62)$$

Calculul forței generalizate X , asociată coordonatei generalizate x , (acționând pe direcția de creștere a lui x) se poate face în două ipoteze:

➤ *Fluxurile magnetice sunt menținute constante, adică $\Phi_k = ct$. și $d\Phi_k = 0$.*

În acest caz

$$\delta L = -(dW_m)_{\Phi=ct.} \quad (4.63)$$

și lucrul mecanic se efectuează în baza scăderii energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcție numai de fluxurile magnetice și de coordonata generalizată, $W_m = W_m(\Phi_1, \dots, \Phi_n, x)$, (în cazul unei bobine $W_m = \frac{\Phi^2}{2L(x)}$) și lucrul mecanic cu relația generală (2.46), relația (4.63) conduce, în ipoteza de lucru adoptată, la:

$$X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi=ct.}, \quad (4.64)$$

relație ce reprezintă prima teoremă a forțelor generalizate în câmp magnetic:

“Forța generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parțială cu semn schimbat a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcție numai de fluxurile magnetice și coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x , la fluxuri constante.”

➤ *Curenții circuitelor sunt menținuți constanți, adică $i_k = ct$. și $di_k = 0$.*

Se prelucrează relația (4.62) în care

$$dW_m = d\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k i_k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k, \quad (4.65)$$

obținând

$$\delta L = \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k. \quad (4.66)$$

Este evident că în acest caz

$$\delta L = (dW_m)_{i=ct.}, \quad (4.67)$$

și energia primită de sistem se împarte în mod egal pentru efectuarea de lucru mecanic și pentru creșterea energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcție numai de curenți și de coordonata generalizată, $W_m = W_m(i_1, \dots, i_n, x)$, (în cazul unei bobine $W_m = \frac{1}{2} L(x) i^2$) și lucrul mecanic cu relația generală (2.46), relația (4.67) conduce, în ipoteza de lucru adoptată, la:

$$X = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i=ct.}, \quad (4.68)$$

relație ce reprezintă a doua teoremă a forțelor generalizate în câmp magnetic:

“Forța generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parțială a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcție numai de curenți și coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x , la curenți constanți.”

Observație:

1. Forțele exercitate între conductoarele parcurse de curenți electrici de conducție se numesc *forțe electrodinamice*;
2. Forțele exercitate între conductoare parcurse de curent și piese feromagnetice se numesc *forțe electromagnetice*.

Aplicația 1. Calculul forței portante a unui electromagnet.

Să se calculeze forța care se exercită asupra armăturii mobile a unui electromagnet (Fig. 4.16) când bobinei acestuia i se aplică o tensiune u .

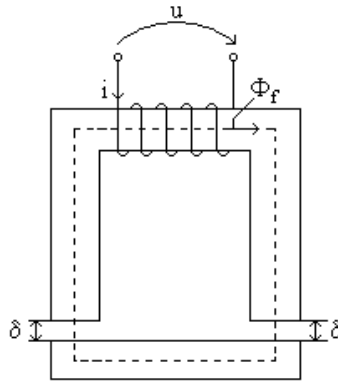


Fig. 4.16

Coordonata generalizată este reprezentată de grosimea δ a întrefierului. Ea se regăsește în expresia reluctanței, respectiv în cea a inductivității. Astfel, reluctanța circuitului magnetic cu întrefier variabil este:

$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} A_{Fe}} + \frac{2x}{\mu_0 A_0},$$

unde l_{Fe} , μ_{Fe} , A_{Fe} , reprezintă lungimea circuitului în materialul feromagnetic, permeabilitatea și respectiv secțiunea transversală a circuitului magnetic; $x = \delta$, iar μ_0 , A_0 , permeabilitatea aerului și respectiv secțiunea transversală a circuitului magnetic în zona întrefierului.

Inductivitatea bobinei se exprimă cu relația:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{N^2\Phi_f}{Ni} = \frac{N^2\Phi_f}{U_m} = \frac{N^2}{R_m}.$$

Vom calcula forța electromagnetică în cele două ipoteze.

a) **Prima teoremă:** $\Phi = \text{ct.}$

Se exprimă energia magnetică a bobinei cu relația $W_m = \frac{\Phi^2}{2L(x)}$ și se calculează forța cu relația (4.64):

$$F = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi=\text{ct.}} = -\frac{1}{2} \cdot \Phi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L(x)} \right) = \frac{\Phi^2}{2} \frac{1}{L^2(x)} \frac{\partial L(x)}{\partial x} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}.$$

b) **A doua teoremă:** $i = \text{ct.}$

Se exprimă energia magnetică a bobinei cu relația $W_m = \frac{1}{2} L(x) i^2$ și se calculează forța cu relația (4.68), obținându-se aceeași relație ca în ipoteza anterioară:

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \right)_{i=ct.} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}.$$

Evaluând derivata parțială se obține:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}} = \mu_0 \frac{N^2 A}{\frac{l_{Fe}}{\mu_{rFe}} + 2x} = \mu_0 \frac{N^2 A}{f(x)},$$

respectiv

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -f'(x) \frac{\mu_0 N^2 A}{f^2(x)} = -2 \frac{\mu_0 N^2 A}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{rFe}} + 2x \right)^2} = -2 \frac{L^2}{\mu_0 N^2 A} < 0.$$

Prin urmare, în oricare din cele două ipoteze, forța electromagnetică ce se exercită asupra armăturii mobile are aceeași expresie și valoare negativă. Semnul (–) arată că este o forță ce acționează în sens invers creșterii coordonatei generalizate (grosimea întrefierului), prin urmare este o forță de atracție.

Aplicația 2. Calculul forței care apare între conductoarele unei linii bifilare parcurse de curentul i (Fig. 4.17).

Coordonata generalizată este distanța D dintre cele două conductoare.

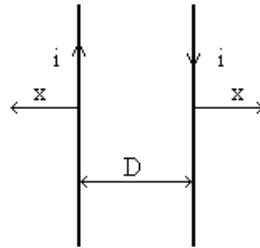


Fig. 4.17

Vom exprima energia magnetică cu relația $W_m = \frac{1}{2} L(D) i^2$ și ținând seama de inductivitatea liniei bifilare (relația 4.8.5) obținem:

$$W_m = \frac{1}{2} L(D) i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l}{\pi} i^2 \left[\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{D}{a} \right].$$

Aplicând cea de-a doua teoremă rezultă:

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial D} \right)_{i=ct.} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(D)}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l}{\pi D} i^2.$$

Dacă valoarea curentului se exprimă în kiloamperi [kA] și distanța dintre conductoare se măsoară în metri [m], se obține o relație practică pentru determinarea forței electrodinamice pe unitatea de lungime a conductoarelor

$$F_l = 0.2 \frac{i^2}{D} > 0 \text{ [N/m]}.$$

Forța calculată fiind pozitivă, rezultă că ea acționează în direcția creșterii distanței dintre conductoare, deci este o forță de respingere.

CAPITOLUL 5

ECUAȚIILE LUI MAXWELL PENTRU CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

5.1 RECAPITULARE - BAZELE TEORIEI CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

5.1.1. Mărimi primitive. Principalele mărimi derivate

	Mărime primitivă	Unit. măsur.	Mărimi derivate	Unit. măsur.		
Caracterizează starea electromagnetică a corpurilor	Sarcina electrică q	C	Densitatea de volum ρ_v	C/m ³		
			Densitatea de suprafață ρ_s	C/m ²		
			Densitatea de linie ρ_l	C/m		
	Momentul electric $\bar{p}$	Cm	Polarizația $\bar{P}$	C/m ²		
	Momentul magnetic $\bar{m}$	Am ²	Magnetizația $\bar{M}$	A/m		
	Intensitatea curentului electric de conducție	A	Densitatea curentului electric de conducție $\bar{J}$	A/m ²		
	Mărime primitivă	Unit. măsur.	Subspecii de mărimi primitive	Unit. măsur.	Mărime derivată	Unit. măsur.
Caracterizează câmpul electromagnetic	Intensitatea câmpului electric în vid $\bar{E}_v$	V/m	Intensitatea câmpului electric $\bar{E}$	V/m	Tensiunea electrică $u_{AB} = \int_{A(C)}^B \bar{E} ds$	V
			Inducția electrică $\bar{D}$	C/m ²	Fluxul electric $\Psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{D} n_{S_\Gamma} dA$	C
	Inducția magnetică în vid $\bar{B}_v$	T	Intensitatea câmpului magnetic $\bar{H}$	A/m	Tensiunea magnetică $u_{mAB} = \int_{A(C)}^B \bar{H} ds$	A (Asp)
			Inducția magnetică $\bar{B}$	T	Fluxul magnetic $\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{B} n_{S_\Gamma} dA$	Wb

5.1.2. Regimurile de desfășurare a fenomenelor electromagnetice

Regim	Caracteristici
Static	$\frac{d}{dt}(\bullet) = 0$ și $\bar{J} = 0$;
Staționar (de c.c.)	$\frac{d}{dt}(\bullet) = 0$ și $\bar{J} \neq 0$;
Cvasistaționar	$\frac{d}{dt}(\bullet) \neq 0$, dar $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$ în conductoare, unde $\bar{J} \neq 0$, și $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$ în condensatoare
Variabil	Cele de la regim cvasistaționar și variația oarecare a mărimilor

5.1.3. Legile teoriei macroscopice a electromagnetismului

a) Legi generale

	Legea	Formele legii			
		compactă	integrală	locală în domenii	locală la suprafețe
1.	inducției electromagnetice	$e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt}$	$\int_{\Gamma} \overline{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \overline{B} n_{S_{\Gamma}} dA$	$rot \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$	$E_{2t} = E_{1t}$
2.	fluxului electric	$\Psi_{\Sigma} = q_{V_{\Sigma}}$	$\int_{\Sigma} \overline{D} n_{\Sigma} dA = \int_{V_{\Sigma}} \rho_v dV$	$div \overline{D} = \rho_v$	$D_{2n} = D_{1n}$
3.	legăturii în cp. el.	$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$			
4.	circuitului magnetic	$u_{mm\Gamma} = \Theta_{S_{\Gamma}} + \frac{d\Psi_{S_{\Gamma}}}{dt}$	$\int_{\Gamma} \overline{H} d\vec{s} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} n_{S_{\Gamma}} dA + \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \overline{D} n_{S_{\Gamma}} dA$	$rot \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$	$H_{2t} = H_{1t}$
5.	fluxului magnetic	$\Phi_{\Sigma} = 0$	$\int_{\Sigma} \overline{B} n_{\Sigma} dA = 0$	$div \overline{B} = 0$	$B_{2n} = B_{1n}$
6.	legăturii în cp. mg.	$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M})$			
7.	conservării sarcinii electrice	$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{V_{\Sigma}}}{dt}$	$\int_{\Sigma} \overline{J} n_{\Sigma} dA = -\frac{d}{dt} \int_{V_{\Sigma}} \rho_v dV$	$div(\overline{J} + \rho_v \overline{v}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$	în c.c. $J_{2n} = J_{1n}$
8.	transformării energiei electromag.		$P_J = ui$	$p_J = \overline{E} \overline{J}$	

b) Legi de material

9.	polarizației temporare	în dielectrici liniari cu $\overline{P}_p = 0$, $\overline{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}$	cu legea legăturii: $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$
10.	magnetizației temporare	în materiale liniare cu $\overline{M}_p = 0$, $\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}$	cu legea legăturii: $\overline{B} = \mu \overline{H}$
11.	conducției electrice	forma integrală: $u_b + e_i = Ri$	forma locală: $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J}$

c) Constante universale ce intervin în legile generale:

- constanta electrică ε_0 – permitivitatea vidului $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} [\text{F/m}]$.
- constanta magnetică μ_0 – permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [\text{H/m}]$.

d) Mărimi de material ce intervin în legile de material – dependente local de natura materialului, temperatura, starea de deformare sau tensionare locală:

- susceptivitatea electrică χ_e
- permitivitatea $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$
- susceptivitatea magnetică χ_m
- permeabilitatea $\mu = \mu_0 \mu_r$
- rezistivitatea ρ (conductivitatea $\sigma = 1/\rho$)
- intensitatea câmpului electric imprimat $\overline{E}_i$.

e) Interdependențele din sistemul legilor electromagnetismului

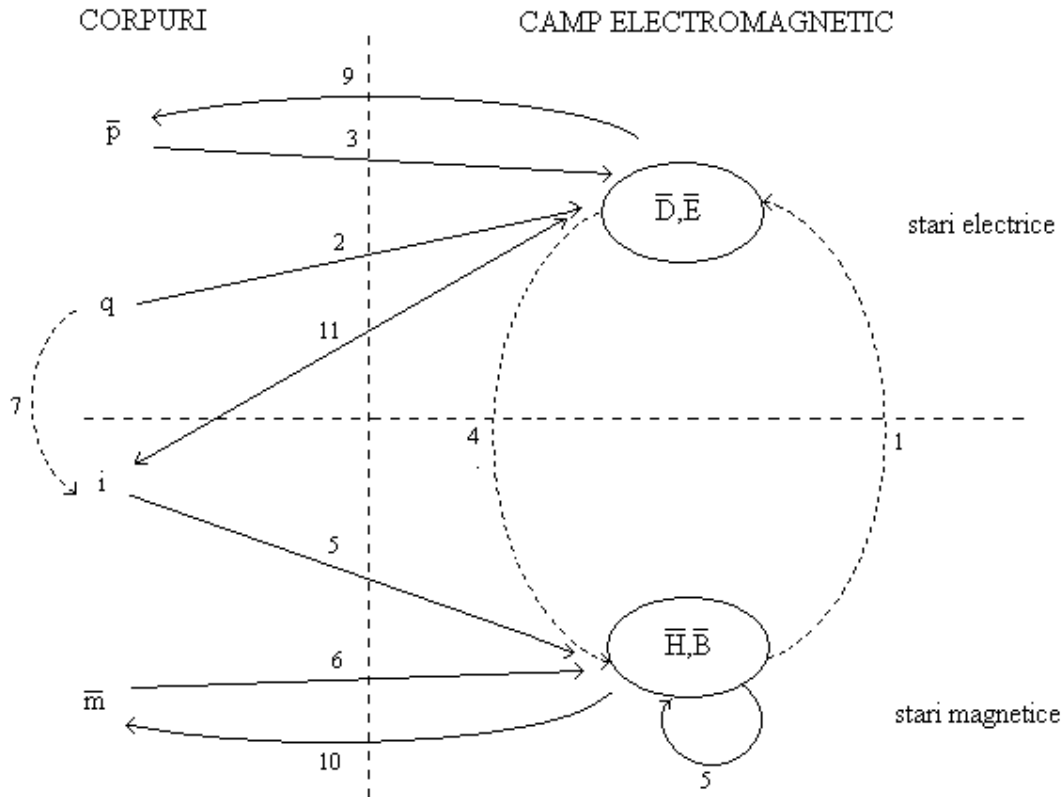


Fig. 5.1

5.2. ECUAȚIILE LUI MAXWELL

Ecuatiile cu derivate parțiale reprezentând formele locale ale legilor generale în medii imobile și în domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale se numesc ecuațiile lui Maxwell. Adăugând relațiile de material pentru medii liniare, se obține sistemul complet al ecuațiilor:

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\
 \text{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\
 \text{div} \bar{D} &= \rho_v \\
 \text{div} \bar{B} &= 0 \\
 \bar{D} &= \epsilon \bar{E} \\
 \bar{B} &= \mu \bar{H} \\
 \bar{J} &= \sigma (\bar{E} + \bar{E}_i)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (5.1) este posibilă dacă se dau caracteristicile de material ϵ , μ , sursele ρ_v și $\bar{J}$ (sau $\bar{E}_i$ și σ), condițiile pe frontiera domeniului în care se determină câmpul (H_i sau E_i), condițiile de trecere la suprafețele de discontinuitate, și condițiile inițiale (corpurile sunt încărcate sau nu, există sau nu polarizație sau magnetizație).

5.3. TEOREMA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE. DENSITATEA FLUXULUI DE ENERGIE ELECTROMAGNETICĂ

O consecință importantă a ecuațiilor lui Maxwell este teorema energiei electromagnetice. Se consideră un domeniu D_Σ în câmpul electromagnetic, cu corpuri imobile ($\vec{v} = 0$), proprietăți de material liniare (fără histerezis, ϵ și μ independente de $\vec{E}$ și $\vec{H}$, și fără polarizație și magnetizație permanentă - $\vec{P}_p = 0$, $\vec{M}_p = 0$). În domeniul D_Σ este localizată o energie electromagnetice W_{em} cu densitatea de energie:

$$w_{em} = \frac{1}{2} \overline{ED} + \frac{1}{2} \overline{HB}. \quad (5.2)$$

Energia electromagnetice se exprimă cu relația:

$$W_{em} = \int_{D_\Sigma} w_{em} dV = \int_{D_\Sigma} \frac{1}{2} (\overline{ED} + \overline{HB}) dV. \quad (5.3)$$

Conform principiului conservării energiei, la variația stării unui sistem fizic, viteza de scădere a energiei sistemului este egală cu suma puterilor cedate de sistem altor sisteme fizice.

Energia se transformă în alte sisteme fizice prin:

- procesul de conducție;
- variația polarizației corpurilor cu histerezis;
- variația magnetizației corpurilor cu histerezis;
- deplasarea corpurilor.

Din ipotezele asumate rezultă că întreaga energie a sistemului se transformă în procesul de conducție. Câmpul electromagnetic din D_Σ este în interacțiune directă numai cu corpurile din D_Σ și cu câmpul electromagnetic din exterior prin suprafața Σ (Fig. 5.2), astfel încât este valabilă relația:

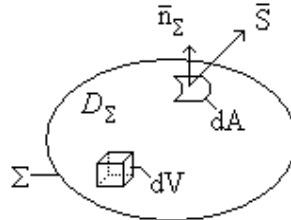


Fig. 5.2

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = P_J + P_\Sigma, \quad (5.4)$$

unde P_J este puterea transmisă de câmp corpurilor din domeniul D_Σ în procesul conducției electrice

$$P_J = \int_{D_\Sigma} \overline{EJ} dV, \quad (5.5)$$

iar P_Σ reprezintă puterea transmisă de câmp prin Σ în sensul normalei la suprafață $\vec{n}_\Sigma$.

Această putere se poate exprima ca fluxul unui câmp de vectori $\vec{S}$, numit *densitate a fluxului de energie*, prin suprafața Σ :

$$P_\Sigma = \int_{\Sigma} \overline{S n_\Sigma} dA. \quad (5.6)$$

Conform principiului localizării acțiunilor fizice, vectorul $\bar{S}$ este funcție numai de starea locală a sistemului fizic care asigură transmiterea energiei.

Cu observațiile de mai sus relația (5.4) poate fi scrisă sub forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_\Sigma} \frac{1}{2} (\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}) dV = \int_{D_\Sigma} \bar{E}\bar{J} dV + P_\Sigma. \quad (5.7)$$

Relația (5.7) reprezintă teorema energiei electromagnetice.

Deoarece corpurile sunt imobile, în membrul stâng al ecuației se poate deriva sub semnul integrală și ținând seama de liniaritatea mediilor și de ecuațiile lui Maxwell rezultă succesiv:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}}{2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D^2}{2\varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \bar{D} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \bar{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \\ &= -\bar{E}(\text{rot} \bar{H} - \bar{J}) + \bar{H} \text{rot} \bar{E} = \bar{E}\bar{J} + (\bar{H} \text{rot} \bar{E} - \bar{E} \text{rot} \bar{H}) = \bar{E}\bar{J} + \text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ținând seama de (5.8) și aplicând teorema Gauss-Ostrogradski, din relația (5.7) rezultă:

$$P_\Sigma = \int_{D_\Sigma} \text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) dV = \int_{\Sigma} (\bar{E} \times \bar{H}) \bar{n}_\Sigma dA. \quad (5.9)$$

Din compararea relațiilor (5.6) și (5.9) rezultă că vectorul $\bar{S}$, numit și vectorul Poynting, poate fi exprimat sub forma:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}. \quad (5.10)$$

Observație:

Teorema energiei electromagnetice este satisfăcută de orice câmp de vectori care diferă de cel de mai sus (rel. 5.10) printr-o expresie cu divergență nulă.

Aplicație: Puterea electromagnetică primită de un conductor cilindric circular drept de rază a și rezistivitate ρ , parcurs de curentul continuu i (Fig. 5.3).

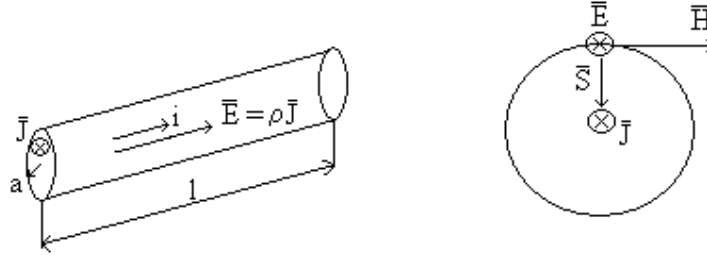


Fig. 5.3

Vectorul intensității câmpului electric este orientat axial și are valoarea

$$E = \rho J = \rho \frac{i}{\pi a^2}.$$

Vectorul intensității câmpului magnetic pe suprafața exterioară este orientat tangențial, asociat cu sensul curentului electric (omoparalel cu sensul lui $\bar{E}$) după regula burghiului drept și are valoarea

$$H = \frac{i}{2\pi a}.$$

Pe baza relației (5.10) rezultă că vectorul Poynting este orientat pe direcția razei, spre interiorul conductorului, având valoarea:

$$S = EH = \rho \frac{i^2}{2\pi^2 a^3}.$$

În consecință, puterea primită de conductorul în stare de conducție de la câmpul electromagnetic este:

$$P_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{S} n_{\Sigma} dA = SA = \rho \frac{i^2}{2\pi^2 a^3} \cdot 2\pi al = \rho \frac{l}{A} i^2 = Ri^2.$$

S-a regăsit deci expresia puterii disipată prin efect electrocaloric (Joule-Lenz) al curentului electric de conducție.

5.4. TRANSMITEREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PRIN CONDUCTOARE

Fie un conductor filiform de rază a , lungime l , rezistivitate ρ , parcurs de curentul de conducție i . Suprafața conductorului este o suprafață de discontinuitate, Σ , pentru liniile de câmp electric și magnetic. Ve ctorii intensităților celor două câmpuri au următoarele orientări și satisfac următoarele condiții (Fig. 5.4):

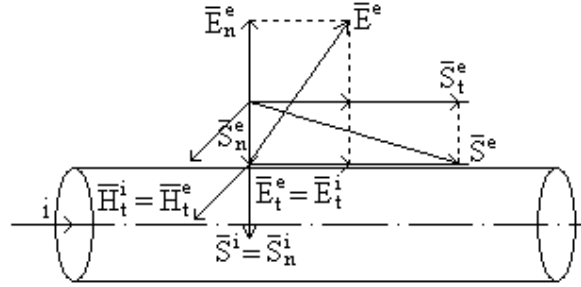


Fig. 5.4

- vectorul intensității câmpului electric $\overline{E}$ are:
 - în *interiorul* conductorului, $\overline{E}^i$ are o componentă axială $\overline{E}_t^i$,
 - în *exteriorul* conductorului, $\overline{E}^e$ are o componentă normală $\overline{E}_n^e$ și una longitudinală (tangențială) $\overline{E}_t^e$.

La suprafața Σ se conservă componenta tangențială a vectorului $\overline{E}_t^i = \overline{E}_t^e$.

- vectorul intensității câmpului magnetic $\overline{H}$ are:
 - în *interiorul* conductorului, $\overline{H}^i$ are o componentă tangențială la linia de câmp $\overline{H}_t^i$,
 - în *exteriorul* conductorului, $\overline{H}^e$ are o componentă tangențială la linia de câmp $\overline{H}_t^e$.

La suprafața Σ se conservă componenta tangențială a vectorului $\overline{H}_t^i = \overline{H}_t^e$.

- vectorul densității fluxului de energie $\overline{S}$ are:
 - în *interiorul* conductorului, $\overline{S}^i$ are o componentă radială îndreptată spre axă $\overline{S}_n^i$,
 - în *exteriorul* conductorului, $\overline{S}^e$ are o componentă normală $\overline{S}_n^e$ și una longitudinală (tangențială) $\overline{S}_t^e$.

Din definiția vectorului Poynting, (rel. 5.10), rezultă componentele acestuia din interiorul și respectiv din exteriorul conductorului și următoarele concluzii:

1. Componenta radială internă, $\bar{S}_n^i$, îndreptată spre axă, aduce regiunii din interiorul conductorului energia necesară procesului de conducție, regăsită sub forma de căldură prin efectul electrocaloric al curentului de conducție;
2. Componenta radială externă, $\bar{S}_n^e$, aduce din câmp până la suprafața conductorului energia necesară procesului de conducție;
3. Componenta longitudinală, $\bar{S}_t^e$, asigură transmiterea energiei în lungul conductorului spre receptor;
4. Conductorul are numai rol de ghidare a transmisiei energiei electromagnetice de la sursă la receptor, absorbind din câmp energia necesară acoperirii pierderilor care apar în procesul de conducție.

5.5. PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ TRANSMISĂ PRINTR-O LINIE ELECTRICĂ

Fie un sistem izolat, delimitat de suprafața închisă Σ , prin care sistemul este alimentat cu o linie electrică cu n conductoare (Fig. 5.5,a). Interesează calculul puterii electrice transmise prin linie sistemului. Pentru aceasta se fac următoarele *ipoteze*, care reprezintă condiții satisfăcute de liniile de transport și distribuție a energiei electromagnetice în regim cvasistaționar:

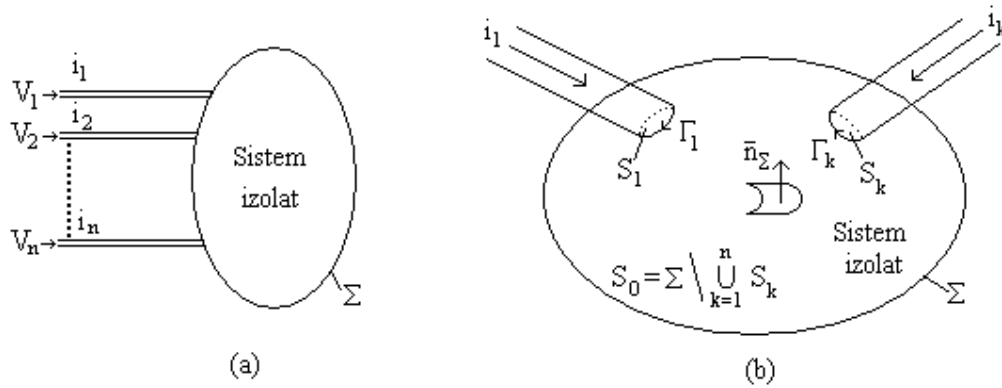


Fig. 5.5

1. În afara conductoarelor nu există curent electric de conducție, adică: $i_{S_0} = 0$, deci pe S_0 $\bar{J} = 0$ în orice punct, iar sistemul fiind izolat, $q_{D_\Sigma} = ct.$, de unde rezultă pe baza legii conservării sarcinii electrice că $i_\Sigma = \sum_{k=1}^n i_k = 0$.
2. Pe Σ : $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n}_\Sigma = 0$, deci componenta normală a inducției electrice, D_n , este constantă în toate punctele suprafeței Σ .
Demonstrație: Dacă $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$, rezultă că suprafața Σ comunică cu domeniul exterior prin curenți de deplasare, ceea ce contrazice ipoteza sistemului izolat.
3. Este necesar să se poată defini un potențial electric V pe Σ , din care derivă câmpul electric conform relației $\bar{E} = -gradV$. Pentru aceasta este necesar ca $\int_{\Gamma} \bar{E} d\mathbf{s} = 0$,

respectiv $\text{rot} \bar{E} = 0$. Ultima relație conduce pe Σ la condiția $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{n}_\Sigma = 0$, adică $B_n = ct$.

în toate punctele suprafeței închise.

Demonstrație: Dacă $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0$, rezultă că suprafața Σ comunică cu domeniul exterior prin cuplaje magnetice, ceea ce contrazice de asemenea, ipoteza sistemului izolat.

4. Pentru simplificare se consideră $\bar{J} \perp S_k$, adică $\bar{J} \times \bar{n} = 0$ pe $\bigcup_{k=1}^n S_k$. Cum $\bar{E} = \rho \bar{J}$,

rezultă că și $\bar{E} \perp S_k$, deci cum $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$, rezultă că vectorul Poynting nu are componentă axială (tangențială), $\bar{S}_t$, în conductoare. Prin urmare, energia electromagnetică nu se transmite prin conductoare, ci numai prin suprafața S_0 din exteriorul lor, pe care $\bar{S}$ poate avea o componentă longitudinală, $\bar{S}_l \parallel \bar{n}_\Sigma$.

Deoarece $\bar{E}$ nu are componentă tangentă la suprafețele S_k , rezultă că aceste suprafețe sunt echipotențiale, având potențialele $V_1, V_2, \dots, V_n$, aceleași potențiale avându-le și contururile $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Cu aceste ipoteze, puterea electromagnetică ce intră în domeniul D_Σ prin Σ este:

$$P_{em} = \int_{\Sigma} \bar{S} \bar{n}_\Sigma dA = \int_{S_0} \bar{S} \bar{n}_\Sigma dA. \quad (5.11)$$

Cum

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = -(\nabla V) \times \bar{H} = -\nabla \times (V \bar{H}) + V(\nabla \times \bar{H}) = -\text{rot}(V \bar{H}) + V \text{rot} \bar{H}, \quad (5.12)$$

relația (5.11) se poate scrie sub forma:

$$P_{em} = \int_{S_0} (-\text{rot}(V \bar{H}) + V \text{rot} \bar{H}) \bar{n}_\Sigma dA. \quad (5.13)$$

Din prima ecuație a lui Maxwell,

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (5.14)$$

și din primele două ipoteze, rezultă că al doilea termen din partea dreaptă a ecuației (5.13) este nul. În consecință

$$P_\Sigma = - \int_{S_0} \text{rot}(V \bar{H}) \bar{n}_\Sigma dA \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\bigcup \Gamma_k} V \bar{H} \bar{ds}, \quad (5.15)$$

unde s-a ținut seama că contururile Γ_k (echipotențiale) pe care se transferă integrala, sunt parcurse în sens asociat cu sensul curenților i_k după regula burghiului drept, iar curenții, intrând în suprafața Σ , au sens contrar normalei $\bar{n}_\Sigma$. Relația se poate prelucra mai departe sub forma

$$P_\Sigma = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} (V \bar{H}) \bar{ds}_k = \sum_{k=1}^n V_k \int_{\Gamma_k} \bar{H} \bar{ds}_k = \sum_{k=1}^n V_k i_k. \quad (5.16)$$

Dacă suprafața Σ delimitează un receptor, relația (5.16) reprezintă puterea electromagnetică primită pe la borne de acest receptor.

Deoarece $\sum_{k=1}^n i_k = 0$, rezultă că alegerea originii potențialelor nu influențează valoarea puterii transmise, astfel încât:

$$P_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n V_k i_k = \sum_{k=1}^n (V_k - V_0) i_k . \quad (5.17)$$

În cazul unei linii bifilare, relația (5.17) devine:

$$P_{\Sigma} = (V_1 - V_2) i = u i . \quad (5.18)$$